

2. ЕЛЕКТРИЧЕН ФЛУКС. ТЕОРЕМА НА ГАУС (И ОСТРОГРАДСКИЈ)

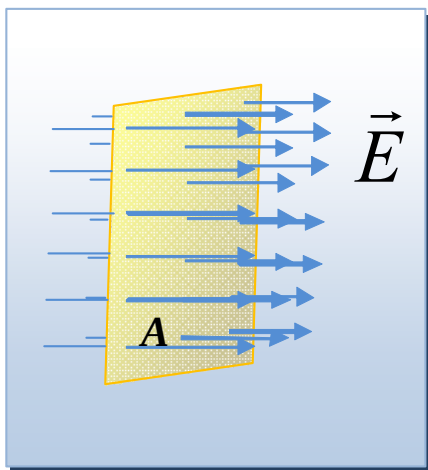
2.1. ЕЛЕКТРИЧЕН ФЛУКС (ПРОТОК)

Флукс е карактеристика на секое векторско поле. Тој поим е поврзан со поимот електрични силиви линии. **Електричниот флукс** (Φ_e) е величина *пропорционална или еднаква на бројот на електричните силиви линии кои пронижуваат дадена површина во просторот*.

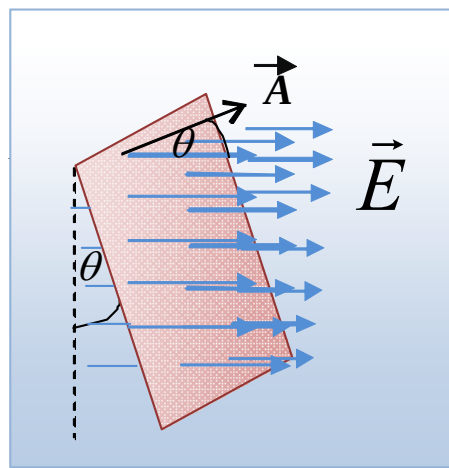
Да претпоставиме хомогено поле кое е прикажано со паралелни, еднакво густии силиви линии. Да замислиме дека таквото поле пронижува една рамна површина A (сл. 2.1). Ако, по договор се земе дека низ единица површина од рамнината A поминува број на силиви линии еднаков (или пропорционален) на модулот на векторот $\vec{E}$, тогаш рамнината со плошина A ќе ја пронижат:

$$\Phi_e = EA \quad (1.19)$$

(Претпоставуваме дека број на силиви линии кој поминуваат низ единица плошина е еднаков на модулот на векторот $\vec{E}$)



Сл. 2.1. Флукс на поле нормално на рамнината



Сл. 2.2 Флукс на поле низ рамнина што зафаќа агол со полето

Ако полето не е нормално на рамнината (сл. 2.2), тогаш бројот на силовите линии е помал, и зависи од аголот што силовите линии го прават со рамнината θ .

Од сликата 2.2 се гледа дека бројот на силовите линии што ја пронижуваат рамнината е даден со:

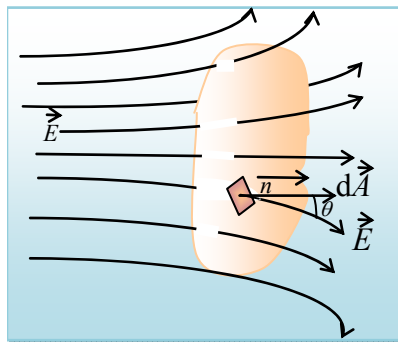
$$\Phi_e = EA \cos \theta, \quad (2.1)$$

За да се определи положбата на една рамнина во просторот се воведува поимот, *вектор на површина*, чиј што правец и насока се поклопуваат со векторот на нормалата, а големината му е еднаква на големината на плоштината на дадената површина, овде на дадената рамнина. Според тоа, ако се воведо векторот $\vec{A}$, тогаш равенката 2.1 може да се запише како:

$$\Phi_e = EA \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (2.1a),$$

при што може да се каже дека електричниот флуks којшто поминува низ една рамнина во хомогено електрично поле е еднаков на скаларниот производ од векторот на електричното поле и векторот на површината, еднаков (или пропорционален) со бројот на силиовите линии што ја пронижуваат рамнината.

Да го разгледаме сега поопштиот случај, кога полето е нехомогено и кога површината е закривена. Во тој случај треба да одбереме многу мал дел од површината $\Delta A_i \rightarrow dA$, така мал што може да го сметаме за рамнина. Поради тоа што плоштината на таа мала површина е многу мала може да се смета дека полето низ целата таа површина е константно $\vec{E}$, па за бескрајно малиот флуks $d\Phi_e$, според сликата 2.3 се добива:



Сл. 2.3. Флуks на нехомогено поле низ закривена површина.

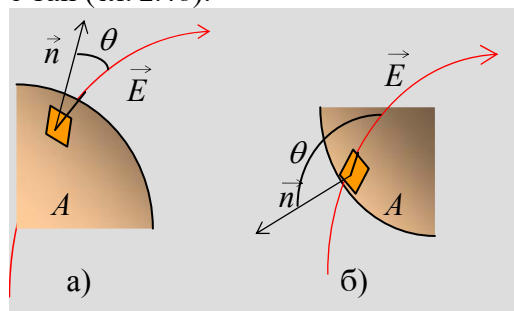
$$d\Phi_e = \vec{E} d\vec{A} = E dA \cos(\vec{E}, \vec{n}) \quad (2.2)$$

каде што со $\vec{n}$ сме го означиле единичниот вектор во правец на нормалата, со насока од центарот на кривината на закривената површина, а аголот $(\vec{E}, \vec{n}) = \theta$.

Ако нè интересира вкупниот флуks низ некоја конечна површина тогаш треба да се “сумираат бесконечно големиот број на бесконечно малите флуks-севи” $d\Phi_e$, по целата површина A , т.е. ќе треба да се изврши интеграција:

$$\Phi_e = \int_A d\Phi_e = \int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_A E dA \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \int_A E dA \cos \theta \quad (2.3)$$

Треба да се каже и нешто за знакот на електричниот флуks. Знаеме дека скаларниот производ меѓу два вектора може да биде позитивен, кога аголот меѓу нив е остар, или негативен ако меѓу векторите аголот е тап. Така и флуksот може да биде позитивен кога аголот меѓу векторот на површината (нормалата) и јачината на електричното поле е остар (види сл. 2.4a) или негативен кога тој агол е тап (сл. 2.4б).



Сл. 2.4

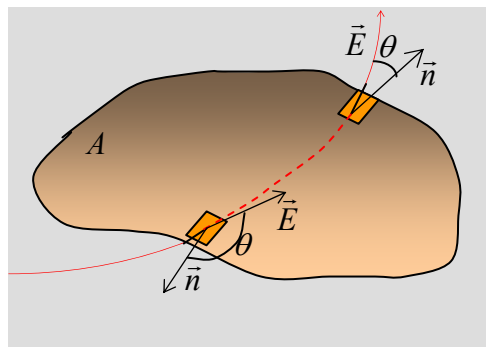
Постои уште еден случај, тоа е случајот кога $\vec{E} d\vec{A} = 0$, тогаш силивите линии лежат на самата површина и не ја сечат.

Кога станува збор за затворена површина (Сл. 2.5), векторот на полето е остар кога силивите линии излегуваат од површината додека, тогаш кога тие

навлегуваат во затворената површина, тогаш овој агол е тап. Вкупниот флуks низ затворената површина A тогаш се добива преку следнава релација:

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} \quad (2.4)$$

при што кругчето на интегралот значи дека интеграцијата се врши по целата затворена површина A .

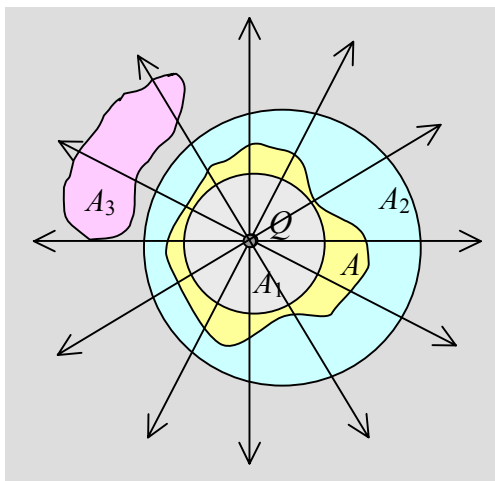


Сл. 2.5

2.2. ТЕОРЕМА НА ГАУС (И ОСТРОГРАДСКИЈ)

Да разгледаме поле на позитивен точкест полнеж $+Q$. Најпрво да разгледаме колкав е електричниот флукс низ сферната површина A_1 во чиј центар е полнежот (сл. 2.6). Бидејќи нормалата на сферната површина се совпаѓа со радиусот, оттаму и $\cos \theta = 1$. Според тоа, електричниот флукс низ дадената сфера со радиус r , ќе биде:

$$\Phi_e = EA \cos \theta = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$



Сл. 2.6.

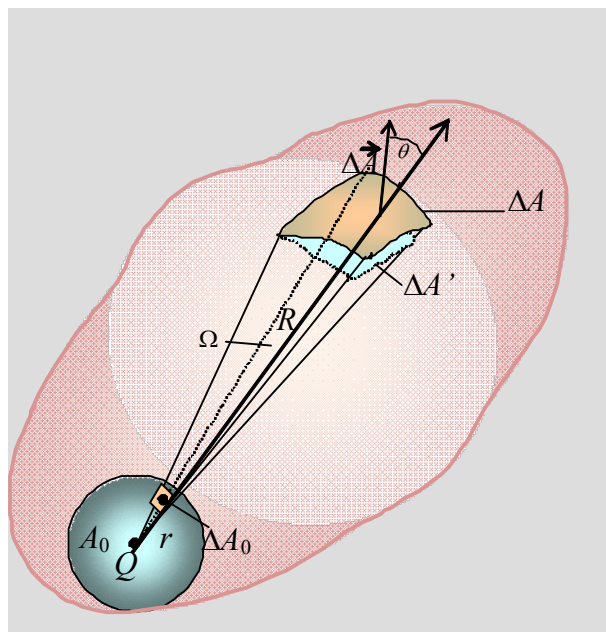
Овој резултат, до којшто дојдовме преку цртежот 2.6, може построго и аналитички да го докажеме. За таа цел ќе се послужиме со сликата 2.7. Замислуваме една затворена површина A која го опфаќа полнежот Q , но не е со сферна форма. Тврдиме дека флуксот низ оваа површина е ист како и флуксот низ сферата A_0 . За да го докажеме ова тврдење ќе одбереме еден просторен агол Ω , кој на сферата пресекува површина ΔA_0 , а на површината A отсекува ΔA . Растојанието од полнежот Q до ΔA е R а од ΔA_0 до полнежот е r . Нека со $\Delta A'$ ја означиме проекцијата на површината ΔA врз сфера со радиус R . Површината ΔA зафаќа со оваа проекција агол θ , па следува:

$$\Delta A' = \Delta A \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \Delta A = \frac{\Delta A'}{\cos \theta} \quad (2.6)$$

Отсечените сферни површини ΔA_0 и $\Delta A'$ се право пропорционални со квадратите на нивните растојанија:

Од сликата 2.6 а и од релацијата 2.5 се гледа дека овој резултат важи не само за сферата A_1 , туку и за сферата A_2 , која е изместена и полнежот не се наоѓа во нејзиниот центар. Конечно, резултатот важи и за било која друга неправилна затворена површина A , која го опфаќа електричниот полнеж Q .

Ситуацијата е поинаква кај површината A_3 . Во овој случај еднаков е бројот на силовите линии кои влегуваат, со тие кои излегуваат од неа, па затоа таму вкупниот флукс е еднаков на нула.



Сл. 2.7

$$\frac{\Delta A'}{\Delta A_0} = \frac{R^2}{r^2} \quad (2.7)$$

Од друга страна, односот на јачините на електричното поле на површините е обратнопропорционален со квадратите на нивните растојанија R и r :

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{r^2}{R^2} \quad (2.8)$$

при што со E_R го означивме модулот на полето на растојание R , а со E_r модулот на растојанието r .

Ќе ги пресметаме сега флуксовите низ површините ΔA и ΔA_0 . Ако со $\Delta \Phi_{e,R}$ го означиме флуксот низ ΔA , а со $\Delta \Phi_{e,r}$ флуксот низ ΔA_0 се добива:

$$\Delta \Phi_{e,R} = \vec{E}_R \Delta \vec{A} = E_R \Delta A \cos \theta \quad \text{и} \quad \Delta \Phi_{e,r} = \vec{E}_r \Delta \vec{A}_0 = E_r \Delta A_0.$$

Имајќи ги предвид релациите (2.6), (2.7) и (2.8) се добива:

$$\Delta \Phi_{e,R} = E_R \Delta A \cos \theta = E_r \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta} \Delta A_0 \right] \cos \theta = E_r \Delta A_0 = \Delta \Phi_{e,r} \quad (2.9)$$

Релацијата 2.9. е доказ за теоремата, бидејќи ако ова важи за просторен агол Ω , ќе важи и за полн просторен агол 4π .

Заклучуваме дека: Електричниот флукс на векторот на електричното поле низ каква и да било затворена површина што опфаќа полнеж Q е еднаков на големината на тој полнеж поделен со електричната константа ϵ_0 .

Овој резултат укажува на тоа дека *електричните силиви линии се непрекинати, односно, дека линиите на електричното поле започнуваат и завршуваат таму каде што постојат електрични полнежи.*

Според овој заклучок, електричниот флукс низ секоја затворена површина во чијашто внатрешност се наоѓа полнеж Q може да се најде според релацијата:

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

Ако во внатрешноста на затворената површина се наоѓаат N различни точкисти полнежи, тогаш електричниот флукс ќе зависи од алгебарската сума на полнежите, па релацијата (2.10) ќе гласи:

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \quad (2.11)$$

Ако наместо точкисти полнежи, во внатрешноста на површината A се наоѓа наелектризирано тело, тогаш флуксот зависи од полнежот на тоа тело, што се добива со интеграција на сите полнежи на даденото тело:

$$Q = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta Q_i \rightarrow \int_Q dQ = \int_V \rho d\tau \quad \text{или} \quad Q = \int_A \sigma dA. \quad (2.12)$$

Во последнава релација претпоставуваме, или дека полнежот е распределен низ волуменот со волуменска густина ρ , па интеграцијата се врши по сиот волумен на телото V ($d\tau$ е елемент на волуменот), или, пак, полнежот е распределен по површината на телото со површинска густина σ па интеграцијата се врши по целата површина на телото (dA е елемент на површината).

Од сето погоре може да се заклучи дека: **електричниот флукс на векторот на електричното поле низ затворена површина е еднаков на алгебарската сума на**

сите полнежи што се наоѓаат во затворената површина поделен до електричната константа ϵ_0 .

Ако затворената површина не опфаќа полнежи (како на пример површината A_3 од сликата 2.6,) електричниот флукс е еднаков на нула.

Теоремата што беше образложена понапред ја докажал во 1828 година М. В. Остроградскиј (1801-1862) и била применета во теорија на топлина. Ја докажал и Гаус (Gauss Karl Friedrich, 1777-1855) кој го добил соодветниот резултат применет на електричното поле и го публикувал 1839 година. Во литературата која потекнува од западните земји теоремата е позната како Гаусова, а во книгите со руско потекло најчесто теоремата се вика “теорема на Гаус и Остроградскиј”.

Како што се гледа, Гаусовата теорема ја дава општата врска помеѓу електричните полнежи и електричното поле, а оттаму таа дава можност подлабоко да се навлезе во природата на електричното поле. При докажувањето на оваа теорема се користи Кулоновиот закон, така што таа може да се смета и за последица на овој закон, или може да се каже дека претставува многу поопстојна формулација на овој закон.

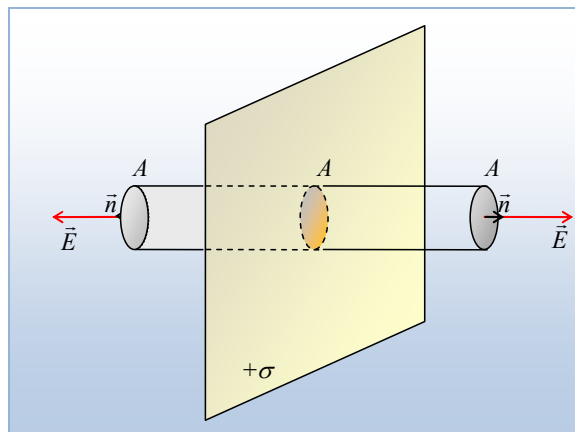
Во принцип, јачината на електричното поле создадено од некој распределен полнеж може секогаш да се пресмета со користење на Кулоновиот закон. Вкупното (резултантно поле во која и да било точка е векторска сума (најчесто, интеграл) од придонесот на сите полнежи. Но, со исклучок на многу мал број едноставни примери оваа задача е доста сложена. Денес доста такви примери можат да се решаваат нумерички со помош на компјутерите и програмските пакети по математика (Matemtica, Matlab и други).

Инаку, Гаусовата теорема дава можност во многу случаи електричното поле да се определи многу попросто и побрзо.

2.3. ПРИМЕНА НА ГАУСОВАТА ТЕОРЕМА

Во општ случај примената на Гаусовата теорема изгледа доста тешка (видете ги релациите 2.10 и 2.12) бидејќи треба да се реши површински интеграл, кој може да биде комплициран и нерешлив. Меѓутоа, тоа не мора да е така, бидејќи во дадената задача при определување на овој интеграл може како затворена површина, често се вика *Гаусова површина*, по која ќе се врши интеграцијата, да се одбере по желба, обично таква што овозможува лесно да се дојде до решението. Ќе го илустрираме ова со неколку примери.

2.3.1. Поле на рамномерно наелектризирана рамнина



Сл. 2.8

Да замислиме една бескрајна рамнина, наелектризирана со еднаква површинска густина σ (сл. 2.8). Од симетријата на проблемот јасно се гледа дека силовите линии на векторот на електричното поле се насочени нормално на рамнината и тоа од неа, ако е рамнината наелектризирана позитивно или кон неа, ако полнежот и е негативен.

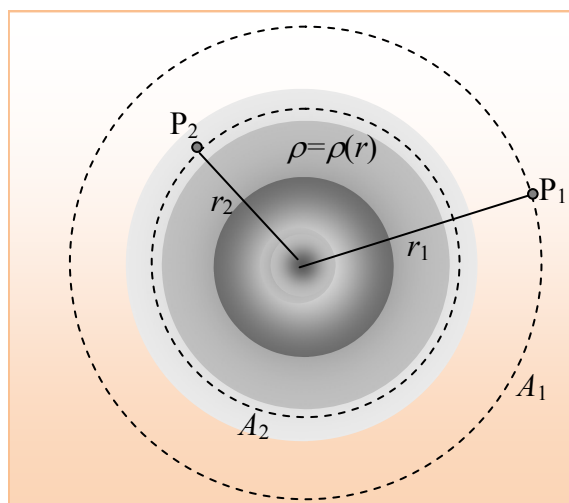
Како Гаусова површина одбираме цилиндар чии што базиси се паралелни со рамнината, а електричното поле $\vec{E}$ е нормално на

рамнината, па и на базисите. Бидејќи силовите линии се колинеарни со векторите на рамнините на базисите, тогаш аголот меѓу нив е еднаков на нула, па следува дека $\cos \theta = 1$. Бидејќи силовите линии излегуваат само низ базисите, а не и низ обвојницата на цилиндричната Гаусова површина, тогаш и сèвкупниот електричниот флуks е $\Phi_e = 2EA$. Вкупниот полнеж зафатен со цилиндарот е σA . Според теоремата на Гаус-Остроградскиј, ќе биде:

$$2EA = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.13)$$

Во примерот 3 од поглавјето 1.2.3 беше покажано како оваа релација се добива со користење на Кулоновиот закон. Споредувањето на овие два метода укажува на тоа колку е многу поедноставно определувањето на полето преку Гаусовата теорема.

2.3.2. Електрично поле на сферно симетрична распределба на полнежот



Ако претпоставиме дека имаме полнеж чија што волуменска густина ρ зависи само од растојанието од една точка (центарот на распределбата), велиме дека станува збор за *сферно симетрична распределба на полнежот*. Тогаш е $\rho = \rho(r)$. Ова ќе го илустрираме со случајот на сликата 2.9.

Да одбереме две точки P_1 и P_2 кои лежат на Гаусовите површини - сфери, чиешто пресеци со рамнината која поминува низ центарот се означени со испрекинатите линии. Точката P_1 , со радиус r_1 е надвор од распределбата на полнежот и за неа со примена на дефиницијата на

Сл. 2.9

флуksот се добива:

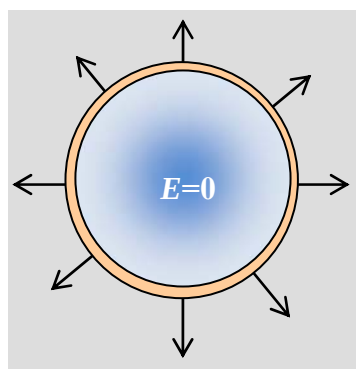
$$\Phi_{e,r_1} = 4\pi r_1^2 E_1.$$

Ако се примени Гаусовата теорема, која дава дека флуksот е еднаков на полнежот што се наоѓа во сферата A_1 (што ќе го означиме со Q_{A1}) поделен со електричната константа ($\Phi_{e,r_1} = Q_{A1} / \epsilon_0$), за полето E_1 се добива:

$$E_1 = \frac{Q_{A1}}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad (2.14)$$

Ако релацијата (2.14) ја споредиме со полето на точкест полнеж, наоѓаме дека полето на површината A_1 е исто како сите полнежи да се сконцентрирани во нејзиниот центар (центарот на распределбата). Истото може да се примени за сферата A_2 . Електричното поле на која и да било точка (на пр. P_2) од сферата A_2 е исто со полето што би се добило кога сите полнежи што се затворени со оваа сферна површина да се наоѓаат во нејзиниот центар, а полнежите надвор од оваа сфера како да ги нема. Ако $\rho = \rho(r) = dQ/d\tau$, тогаш полнежот затворен во сферна површина со радиусот ќе биде даден со

$$Q_2 = \int_0^{r_2} \rho(r) d\tau = 4\pi \int_0^{r_2} \rho(r) \cdot r^2 dr$$



Сл. 2.10. Поле на шуплива сфера.

Флуксот низ сферата со радиус r_2 ќе биде даден со $\Phi_{e,r_2} = 4\pi r_2^2 E_2$. Ако ја примениме Гаусовата теорема па за флуксот замениме Q_2 / ϵ_0 , тогаш за јачината на електричното поле на растојание r_2 од центарот на сферната распределба ќе добиеме:

$$E_2 = \frac{Q_{A_2}}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\int_0^{r_2} \rho(r) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{4\pi \int_0^{r_2} \rho(r) \cdot r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{1}{\epsilon_0 r_2^2} \int_0^{r_2} \rho(r) \cdot r^2 dr$$

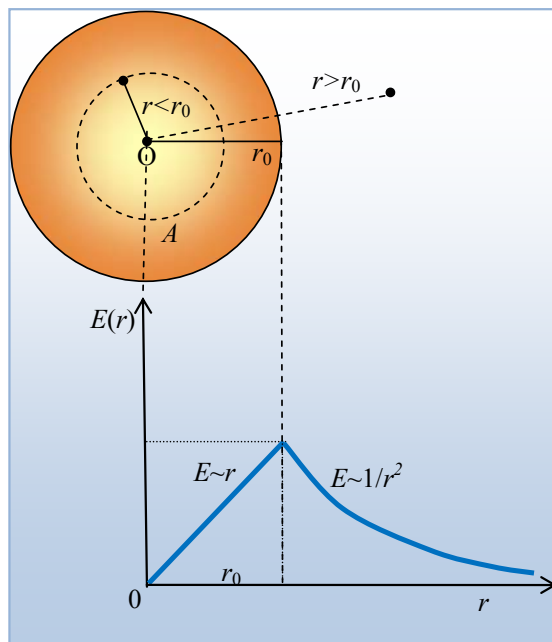
Ако станува збор за пресметување на електричното поле во внатрешноста на шуплива наелектризирана сфера (сл. 2.10), тогаш за внатрешноста важи дека $Q=0$, јасно е дека електричното поле е еднакво на нула.

2.3.3. Електрично поле на рамномерно наелектризирана топка

Рамномерно наелектризирана топка е таква топка во која во секоја нејзина точка волуменска густина е иста (ρ). Тоа е посебен важен случај од претходно пошто дадениот пример. Нека топката има радиус r_0 , и вкупен електричен полнеж Q , тогаш волуменската густина е дадена со:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \quad (2.15)$$

Распределбата е сферно-симетрична, па за да ја определиме полето E во некоја точка од внатрешноста на сферата, за Гаусова површина A ќе одбиреме сфера со радиус $r < r_0$. Полнежот што го затвора оваа површина (слика 2.11, со испрекината линија), е даден со:



Сл. 2.11

$$Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (2.16)$$

Ако од оваа равенка се пресмета ρ и се внесе во (2.25), за полнежот во сферата со радиус r се добива: $Q_r = Q \frac{r^3}{r_0^3}$.

Електричниот флуks на оваа сфера, по дефиниција, е :

$$\Phi_e = E4\pi r^2,$$

а според теоремата на Гаус тој е:

$$\Phi_e = \frac{Q_r}{\epsilon_0}.$$

Ако десните страни од последниве две равенки се изедначат, за полето E се добива:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r_0^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r \quad (2.17)$$

Од релацијата произлегува дека **за точките од внатрешноста на сферата полето линеарно расте со растојанието од центарот**. Значи, при $r=0$, и $E=0$.

За точките надвор од наелектризираната сфера, т.е. за сите $r > r_0$ полето е исто како и во претходно објаснетиот случај (2.3.2), бидејќи станува збор за сферно симетрична распределба на волуменската распределба на полнежите следува дека полето е:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (2.18)$$

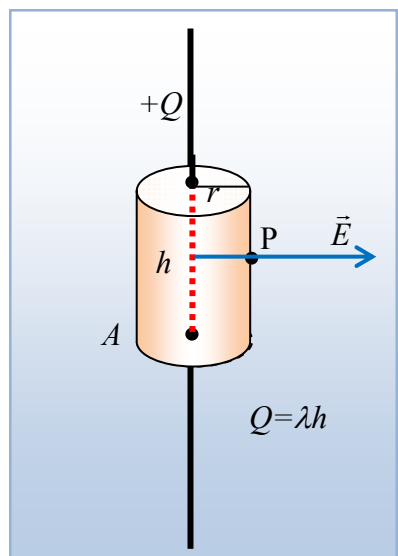
Тоа значи полето надвор од сферата е идентично со полето од точкест полнеж поставен во центарот на сферата и опаѓа со квадратот на растојанието. На сликата 2.11 дадена е зависноста на електричното поле од растојанието од центарот на рамномерно наелектризираната сфера ($E=E(r)$).

2.3.4. Електрично поле на бескрајно долг праволиниски спроводник

Претпоставуваме да имаме многу долг (или бескрајно долг) спроводник наелектризиран рамномерно со насекаде еднаква линиска густина на полнеж λ . Нè интересира полето создадено во некоја точка P која се наоѓа на растојание r од спроводникот.

Поради симетријата на проблемот е јасно дека силовите линии се радијални прави линии во однос на секоја точка од оската на спроводникот. Како резултат на тоа, јачината на електричното поле е насочена во правец на нормалата на оската на спроводникот, со насока од него, ако е позитивно наелектризиран, односно кон него ако е негативно наелектризиран.

Задачата ќе ја решиме наједноставно ако точката P во која го бараме полето ја поставиме да лежи на обвивката на цилиндрична Гаусова површина чијашто оска се поклопува со оската на наелектризираниот спроводник (види сл. 2.12). Во тој случај низ базисите на цилиндарот не поминува ниту една силова линија, па за површина за која флуksот е различен од нула (што ги сече силовите линии) се зема само



Сл.2.12

обвивката, чија што плоштина е $2\pi rh$.

Флуксот на векторот на електричното поле, по дефиниција е:

$$\Phi_e = E 2\pi rh, \quad (2.19)$$

а тој според Гаусовата теорема е еднаков на полнежот што се наоѓа во внатрешноста на Гаусовата површина. Тој полнеж е $Q = \lambda h$, па за флуксот се добива:

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

Имајќи ги предвид двете последни релации, со изедначување на нивните десни страни за електричното поле се добива:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (2.21)$$

Релацијата 2.21 покажува дека еден многу долг нелектризиран прав спроводник создава околу себе поле кое е пропорционално со линиската густина на полнежот, а обратнопропорционално на растојанието од оската на спроводникот.

2.3.5. Јачина на електрично поле во близина на наелектризиран спроводник со произволна форма

Нека имаме една произволно закривена површина. Нека е таа наелектризирана позитивно (Сл. 2.13). Значи силовите линии излегуваат од неа.

За Гаусова површина избираме многу мал цилиндар, како и во примерот 2.3.1. Неговата висина е h и е со многу мала димензија, такашто базисите A се во непосредна близина на површината, едниот од едната страна, а другиот од другата страна. Бочната површина на обвивката на цилиндарот е нормална на површината и низ неа не излегуваат силовии линии.

Веќе кажавме дека во внатрешноста на спроводникот полето не постои, а во надворешниот дел од спроводникот, силовите линии се нормални на неговата површина. Тоа значи дека силовите линии излегуваат само низ надворешниот базис A . Според дефиниција флуксот низ Гаусовата површина е:

$$\Phi_e = EA,$$

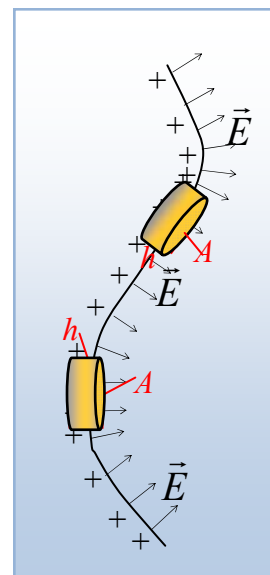
а според теоремата на Гаус

$$\Phi_e = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

Па ако сега ги израмниме десните страни на последниве релации и скратиме со A , за електричното поле во близината на еден спроводник со произволно закривена површина се добива:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

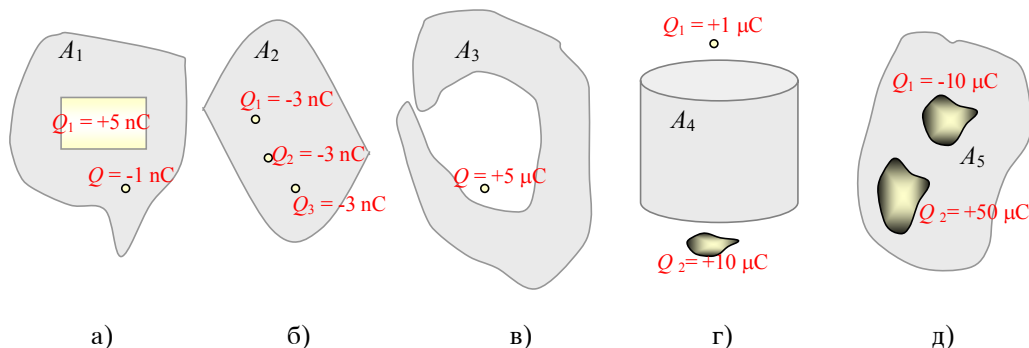
Забелешка: Овде σ подразбира површинска густина само од едната страна на спроводникот. Може да се каже дека во примерот 2.3.1 се добива истото ако таму се стави: $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2}$ сметајќи дека полнежите се подеднакво распределени на обете страни од закривената површина.



Сл.2.13

ПРАШАЊА И ПРОБЛЕМИ

1. На сликата 2.14 се дадени 5 различни површини A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и A_5 . Анализирајќи ја сликата може ли да го определите флуksот низ секоја од површините.



Сл.2.14

Образложете го вашиот одговор.

Пример задачи

2. Од коцка со раб 18,0 cm излегува електричен флуks, еднаков на $1,45 \cdot 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$. Колкав и каков полнеж се наоѓа во коцката?

Решение:

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = \epsilon_0 \Phi_e = +1,28 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

3. Електрично поле во непосредна близина на површината на една метална сфера со радиус $r = 3 \text{ cm}$ е $E = 2,1 \cdot 10^2 \text{ N/C}$ и насочено е кон сферата. Колкав и каков полнеж има сферата?

Решение:

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = E 4\pi \epsilon_0 r^2 = 2,09 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

Полнежот е негативен.

4. Електричното поле во близина на површината на Земјата има големина околу 150 N/C и е насочено кон центарот на Земјата.

а) Колкав е вкупниот полнеж на Земјата?

б) Колку електрони припаѓаат на 1 m^2 од Земјината површина?

Решение:

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = -E 4\pi \epsilon_0 R^2$$

$$Q = -4\pi \epsilon_0 \cdot 6,35^2 \cdot (10^6)^2 \cdot 150 = 6,7 \cdot 10^9 \text{ C}$$

$$\text{а) } Q = 4,2 \cdot 10^{24} e \quad \text{б) } Q_1 = 8,3 \cdot 10^{11} \text{ elektroni.}$$

5. Полнеж Q е поставен во темето на една коцка со раб a . Определете го флуksот на електричното поле низ таа коцка (слика 2.15). (Забелешка: нема потреба да се врши интеграција)

Решение:

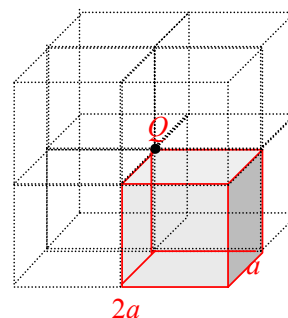
За Гаусова површина A може да се земе коцка со раб $2a$, така што полнежот Q да се најде во центарот на Гаусовата површина.

За таа нова коцка Флуксот е определен со :

$$\Phi_e = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_e = E \cdot 6(2a)^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Поради симетрија на проблемот низ 1/8 дел од површината ќе поминува флукс :

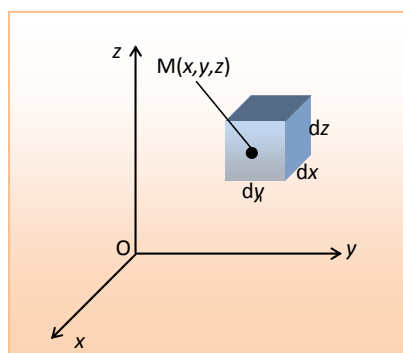
$$\Phi_e = \frac{1}{8} \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Сл. 2.15

2.4. РАВЕНКА НА ПУАСОН (ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ФОРМА НА ГАУСОВАТА ТЕОРЕМА)

Гаусовата теорема, дадена со релацијата (2.11) ја дава врската меѓу векторот на електричното поле на точките кои што лежат на некоја затворена површина и големината на вкупниот полнеж кој се наоѓа во внатрешниот волумен на таа затворена површина. Значи, таа ги поврзува физичките величини кои се однесуваат на различни точки во просторот. Можно е оваа теорема да се даде во таква форма, така што таа ќе ги поврзува физичките величини на една иста точка. За таа цел треба теоремата да се примени на бесконечно мал волумен.



Сл. 2.16

Во просторот каде што постои електричното поле ќе воведеме просторен Декартов координатен систем - x, y, z (сл. 2.16). Нека нè интересира некоја точка M , во која постои поле опишано со векторот $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ се единични

вектори во насока на координатните оски, а E_x, E_y, E_z се проекциите на векторот на полето во насока на координатните оски).

Да разгледаме сега еден бесконечно мал квадар, во чие што едно теме се наоѓа точката $M(x, y, z)$, а страните dx, dy , и dz се паралелни со координатните оски.

Да го пресметаме флуксот низ површината на овој квадар.

Претпоставуваме дека низ површината $dydz$, на која лежи точката M (на сликата со светло сино), силовите линии на полето влегуваат во квадарот. Низ оваа површина навлегува x -комонентата на векторот на полето E_x , па флуксот низ граничната површина $dydz$ е:

$$- E_x dydz,$$

каде што знакот минус се става затоа што меѓу векторите $\vec{E}$ и нормалата на површината $dydz$ аголот е π , па $\cos\theta = -1$. Флуксот низ површината што е паралелна со $dydz$, поместена за dx долж x -оската:

$$\left[E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right] dydz$$

па вкупниот флукс низ овие две површини е:

$$\left[E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right] dydz - E_x dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dydz.$$

Ако се има предвид дека $dx dy dz = d\tau$ е елемент на волуменот и аналогно се пресмета флуksот низ останатите страни на квадарот ќе се добие дека тој е еднаков на:

$$\Phi_e = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] d\tau \quad (2.22)$$

Ако во точката М волуменската густина на полнежот е $\rho(x,y,z)$, во бесконечно малиот квадар големината на електричниот полнеж ќе биде $\rho d\tau$. Сега може да се примени Гаусовата теорема за квадарот како затворена површина:

$$\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \rho d\tau, \text{ или } \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.23)$$

Равенката (2.23) се вика равенка на Пуасон (Poisson, 1781-1840). Овде треба да се напомене дека Пуасоновата равенка има смисла само во одредени услови. Волуменската густина на полнежите треба да се толкува како просечна за некој мал, но сепак конечен простор којшто содржи многу наелектризирани честички. Функцијата $\rho(x,y,z)$ треба да е непрекината во математичка смисла на зборот. Можеби изгледа необично, меѓутоа моделот за непрекината распределба на полнежот важи само во макроскопски услови. Во микро светот, во светот на атомите, на пример, воопшто не може да стане збор за непрекинатост на оваа функција.

Равенката (2.23) може да се изрази и поинаку. Во векторска анализа се покажува дека флуksот на некој вектор, овде $\vec{E}$, низ затворена површина A , и големината на волуменот, ограничен со таа површина, ако тој волумен тежи кон нула, не зависи од формата на површуната A . Оваа граница се вика дивергенција на векторот и се означува како:

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{A}}{\tau}.$$

Со користење на оператор “набла” $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$, кој уште се вика Хамилтонов вектор и сам за себе нема никаква смисла, туку има смисла ако се приложи да дејствува на некоја скаларна или векторска функција. Дивергенција на некој вектор е скаларен производ од ∇ и од дадениот вектор. Така,

$$\text{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Според тоа, равенката на Пуасон може да се запише како:

$$\text{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.24)$$

Ако во просторот нема полнежи, т.е. $\rho=0$, тогаш

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad (2.25)$$

Пуасоновата равенка ја викаме Гаусова теорема во диференцијална форма, бидејќи таа ги поврзува физичките величини што се однесуваат на една иста точка: јачината на електричното поле и волуменската густина на полнеж во дадената точка. Со помош на Пуасоновата равенка може да се решаваат некои проблеми на определување на полето ако е позната функцијата на волуменската густина.

ПРАШАЊА и ПРОБЛЕМИ

1. Со користење на Пуасоновата равенка да се определи полето создадено од еден наелектризиран бесконечно долг цилиндар (сл.2.17) со радиус a и константна волуменска густина на полнежот ρ .

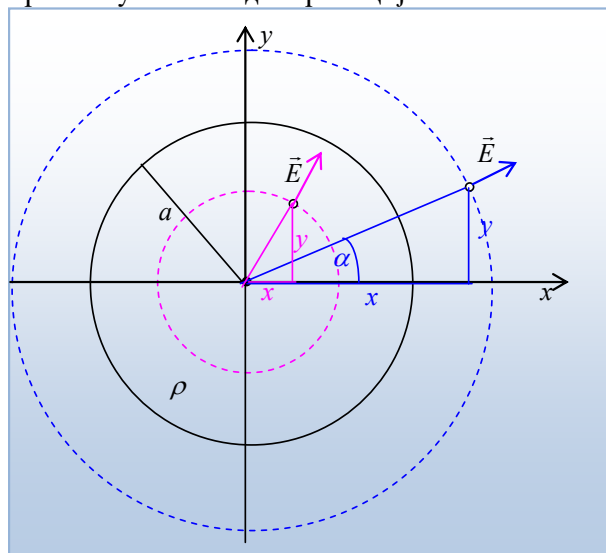
Решение :

Надвор од цилиндарот електричното поле е исто како и полето на линиски спроводник кој би бил поставен долж оската на цилиндарот. Тоа е радијално поле чија јачина се менува со $1/r$ каде што r е растојанието од оската на цилиндарот до дадената точка во која се бара полето.

Внатрешното поле ќе го определиме со примена на Гаусов закон врз Гаусова површина A_1 - цилиндар со радиус $r < a$;

$$E \cdot 2\pi rh = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot r^2 \pi h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

Сликата 2.18 го дава напречниот пресек на ова поле. Иако овде Декартовиот координатен систем не е многу погоден, ние ќе го користиме за да вежбаеме пресметување на дивергенција.



Сл.2.18

Бидејќи

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

компонентите на полето може да се запишат :

За $r > a$, x -компонентата е:

$$E_x = E \cos \alpha = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \frac{x}{r} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)}$$

а за $r < a$

$$E_x = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \frac{x}{r} = \frac{\rho x}{2\epsilon_0}.$$

y -компонентите се:

за $r > a$

$$E_y = E \sin \alpha = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \frac{y}{r} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)}$$

а за $r < a$

$$E_y = E \sin \alpha = E \frac{y}{r} = \frac{\rho y}{2\epsilon_0}.$$

E_z компонентите се нула.

Сега да ја пресметаме дивергенцијата, надвор од цилиндарот и внатре.

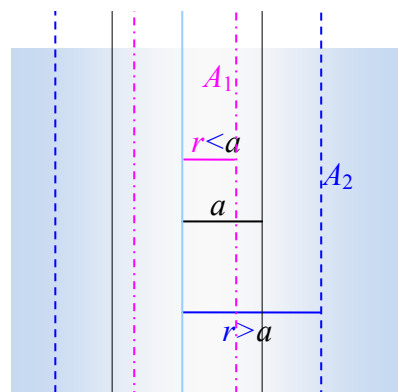
Надвор: за $r > a$ ќе биде:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 0$$

Значи, надвор од цилиндарот, каде што нема полнежи, нема извори на поле.

Дивергенцијата е нула. Во внатрешноста, тоа не е случај, за $r < a$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ што можеше и да се очекува.}$$



Сл. 2.17