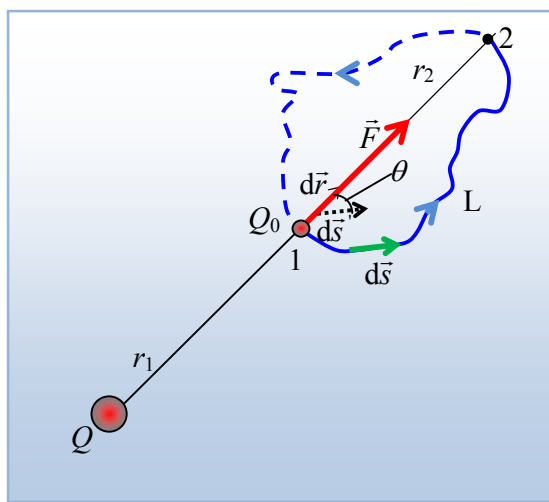


3. ЕЛЕКТРИЧЕН ПОТЕНЦИЈАЛ

3.1. РАБОТА ВО ЕЛЕКТРОСТАТСКО ПОЛЕ

На секое наелектризирано тело донесено во електростатско поле му дејствува силата на полето. Јачината на електричното поле е силова карактеристика на полето. Но, можно е полето да се опише и со помош на енергетска карактеристика на полето, позната како електричен потенцијал. За да ја воведеме оваа физичка величина најпрво да ја определиме работата што се врши во поле на еден точкест полнеж Q за пренесување на еден пробен полнеж Q_0 (Сл. 3.1). Претпоставуваме дека точкестиот полнеж Q кој го создава полето е позитивен. Нека во почетниот момент пробниот полнеж Q_0 се наоѓал во точката 1. На него дејствува Кулонова сила дадена со релацијата:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} \vec{r}_0 \quad (3.1)$$



Сл. 3.1

Силата е насочена долж растојанието до пробниот полнеж Q_0 . Движејќи се радијално пробниот полнеж ќе се помести од положба 1 во положба 2. Бидејќи полнежот се движи, тој врши работа. Наша задача е да ја пресметаме таа работа. Бидејќи силата е променлива, тогаш работата може да се добие само со сумирање на елементарните работи што се вршат при многу малите поместувања за коишто може да се смета дека

силата е константна.

Работата што притоа се врши е :

$$W = \int_1^2 dW \quad (3.2)$$

каде што dW е работата што се врши за елементарното поместување $d\vec{r}$ по должината на кое силата може да се смета за константна. Бидејќи

силата и поместувањето се со ист правец, тогаш и насока за елементарната работа dW може да се запише како:

$$dW = Fdr \quad (3.3)$$

Силата е Кулоновата па се определува со помош на (3.1), па за работата што се врши се добива изразот:

$$W = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right] \quad (3.4)$$

Иста толкава работа ќе се изврши и ако полнежот Q_0 се движел долж некоја линија L со произволна форма, ако таа ги спојува точките 1 и 2 (сл. 3.1). Имено, работата што се врши долж поместувањето $d\vec{s}$, кое е дел од искривената линија L е дадена со :

$$dW = \vec{F}d\vec{s} = Fds \cos(\vec{F}, d\vec{s}) \quad (3.5)$$

Од сликата 3.1, каде што за аголот е употребена ознаката $(\vec{F}, d\vec{s}) = \theta$ се гледа дека $ds \cos(\vec{F}, d\vec{s}) = d\vec{r}$, па според тоа релацијата (3.5) е еквивалентна со релацијата (3.2), што укажува на тоа дека и работата и во овој случај е дадена со равенката (3.4).

Според тоа заклучуваме: **Работата што се врши при поместување на полнежот Q_0 од местото 1 во местото 2 не зависи од траекторијата туку само од местоположбата на почетокот и на крајот. Значи електростатското поле е потенцијално а електростатските сили се конзервативни.**

Од механиката е познато дека ако работата ја врши силата на полето, таа е позитивна, додека ако работата ја вршат надворешни сили, работата ја сметаме за негативна. Од примерот на сл. 3.1 бидејќи и двата полнежа се позитивни, силата при премин од положба 1 во положба 2 е одбивна, па работата што се врши е позитивна. Меѓутоа, кога пробниот полнеж Q_0 сега го враќаме од положбата 2 во 1, таа работа се врши наспроти дејството на полето, па би требало да се совладува одбивната сила, па затоа работата би била негативна. Оттаму произлегува еден многу важен заклучок: **Работата што се врши при поместувањето на електричен полнеж во некое електростатско поле по затворена линија L е еднаква на нула:**

$$\oint_L dW = 0 \quad (3.6)$$

Имајќи предвид дека силова карактеристика на полето е векторот на јачината на електричното поле, дефиниран како **вектор** чијшто **правец и насока** се поклопуваат со силата со која полето дејствува на мал позитивен пробен полнеж, а **големината** му е дадена со односот меѓу

силата и пробниот полнеж (види глава 2), тогаш како последица на претходната равенка следува дека е и :

$$\oint_L \vec{E} d\vec{s} = \oint_L E_s ds = 0 \quad (3.7)$$

Овој интеграл се вика **циркулација на електричното поле**. Се гледа дека, **циркулацијата на векторот на електричното поле е еднаква на нула**. (Во двете последни равенки интеграцијата се врши долж затворена крива линија L).

Да подвлечеме дека последниов заклучок важи **само** кај електростатско поле. Ќе покажеме подоцна дека полето создадено од полнежите во движење не е потенцијално, и дека за таквото поле релацијата (3.7) нема да важи.

3.1.1 Потенцијална енергија во поле на Кулонова сила.

Познато е дека под потенцијална енергија U се подразбира енергија на тела, која зависи само од земната положба на тие тела. Од механиката е познато дека работата на конзервативните сили во полето на земјината тежа, или поопшто кажано, во поле на гравитационите сили, е функција само од координатите на почетокот и на крајот на патеката на движењето, т.е. од промената на потенцијалната енергија на системот на заемнодејствувачките тела:

$$W = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) \quad (3.8)$$

Ако се погледа релацијата (3.4), и се спореди со (3.8) може да се дојде до заклучокот дека потенцијалната енергија на пробниот полнеж Q_0 во поле создадено од полнеж Q е дадена со релацијата:

$$U = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.9)$$

Од релацијата (3.8) се гледа дека при вршење на работа, промената на потенцијалната енергија е негативна, па велиме доаѓа до намалување на потенцијалната енергија.

Знаеме дека потенцијалната енергија секогаш треба да се мери во однос на одредена положба на телото. Овде претпоставуваме дека потенцијалната енергија се стреми кон нула, кога растојанието меѓу дејствувачките тела расте до бескрајност ($r \rightarrow \infty$). Ако полнежите Q и Q_0 се со ист знак тогаш силата со која телата си заемодејствуваат е одбивна, па и потенцијалната енергија е позитивна. Ако полнежите имаат различен знак, тогаш меѓу нив дејствува привлечна сила па следува дека потенцијалната енергија е негативна величина.

Ако полето е создадено од систем на повеќе полнежи:

$$Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_N,$$

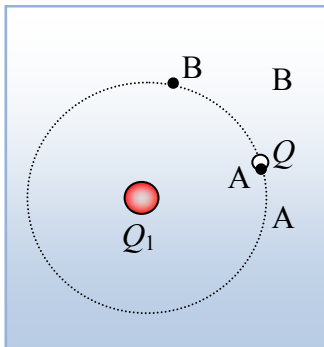
телото со пробниот полнеж Q_0 ќе има потенцијална енергија дадена со збирот од одделните потенцијални енергии, т.е. со релацијата:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i Q_0}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (3.10)$$

Потенцијална енергија на пробниот полнеж Q_0 во поле создадено од повеќе полнежи се добива како алгебарска сума на потенцијалните енергии на истиот полнеж во секое поле создадено од поединечните полнежи.

ПРАШАЊА И ПРОБЛЕМИ

1. Колкава работа се врши кога еден полнеж со големина $+Q$ се движи по патната линија АВ (сл.3.1.1), од точка А во точка В во електрично поле создадено од точечест полнеж $+Q_1$?



Сл.3.1.1.

2. Колкава ќе биде работата што се врши од телото со полнеж Q ако движењето се прави во спротивна насока од точката В во точката А (сл.3.1.1).

Пример задачи

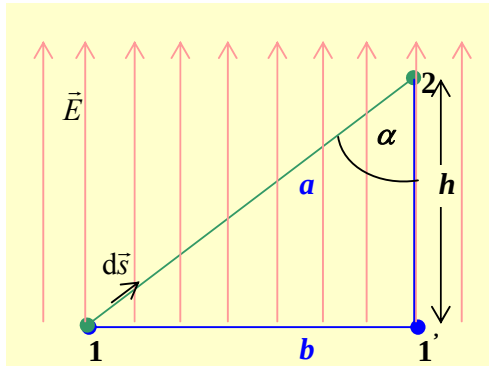
2. Каква работа треба да се изврши за да се пренесе полнеж $Q = 3,0 \mu\text{C}$ од бесконечност во некоја точка што се наоѓа на растојание $r = 0,5 \text{ m}$ од точкестиот полнеж $Q = 20 \mu\text{C}$?

Решение:

$$W = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \text{ како с } \frac{1}{r_1} \rightarrow 0 \Rightarrow W = -3,0 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}^2}{\text{C}} = -1,08 \text{ J}$$

$$W = -1,08 \text{ J}$$

Полнежите се истоимени, работа ја вршат надворешни сили.



Сл.3.1.2

4. На сликата 3.1.2 е дадено хомогено поле. Пресметајте го интегралот $\int \vec{E} d\vec{s}$ по должините на линиите: a (зелено означена линија) и b - сино означена линија.

Решение:

Најпрво да го побараме интегралот по должината на патната линија b . Бидејќи на делот од 1 до 1' е нормален на векторот $\vec{E} \Rightarrow |\vec{E} d\vec{s}| = E ds \cos(\vec{E}, d\vec{s}) = 0$.

Сега да го побараме интегралот по должината на патеката a од точките 1 до 2. Овој интеграл може да се претстави како збир од 2 интеграла, од 1 до 1' и од 1' до 2. Бидејќи од 1 до 1' е еднаков на 0, останува да се пресмета само делот од 1' до 2, кој ќе биде

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^{1'} E ds + \int_{1'}^2 E ds = 0 + \int_{1'}^2 E ds$$

бидејќи $\vec{E}$ е колинеарен вектор со $d\vec{s}$ и $E = \text{const}$, па ќе биде:

$$\int_{1'}^2 E ds = E \int_{1'}^2 ds = E h.$$

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^2 E ds \cos \alpha = E \cos \alpha \int_1^2 ds = E a \cos \alpha = E h$$

3.2. ЕЛЕКТРИЧЕН ПОТЕНЦИЈАЛ. ЕЛЕКТРИЧЕН НАПОН

Од изразите (3.9) и (3.10) може да се види дека односот U/Q_0 е величина којашто воопшто не зависи од тоа каков и колкав е полнежот Q_0 . Тоа кажува дека покрај величината јачина на електричното поле $\vec{E}$, која претставува силова карактеристика на полето, може да се воведи и енергетска карактеристика на полето.

Енергетска карактеристика на електростатското поле е скаларна величина φ и се нарекува **електричен потенцијал**. Потенцијалот во една точка од полето е еднаков на односот помеѓу електричниот потенцијал и енергијата која ја има еден позитивен точков пробен полнеж кој е поставен во дадената точка и големината на тој полнеж:

$$\varphi = \frac{U}{Q_0} \quad (3.11)$$

Ако пробниот полнеж се поместува од положба со потенцијал φ_1 во точка со потенцијал φ_2 , тој при тоа врши работа што е еднаква на намалувањето на потенцијалната енергија :

$$W = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = -Q_0(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.12)$$

Значи, работата што ја врши пробниот полнеж под влијание на силите на полето, движејќи се од една точка во друга, е еднаква на производот од големината на полнежот и разликата на потенцијалите во тие точки, со негативен знак. Треба повторно да се подвлече дека *кога работата се врши од силите на полето, секогаш доаѓа до намалување на потенцијалната енергија.*

Електричниот потенцијал на полето создадено од точкест полнеж Q , во некоја точка која што е од него оддалечена на растојание r , според (3.9) и (3.11) е:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.13)$$

Како што се гледа, потенцијалот е величина која зависи само од полнежот на изворот на полето и од местоположбата на точката.

Напомуваме дека под прираст на потенцијалот, обично се смета разликата $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = V_{21}$, па релацијата (3.12) може да се запише и како:

$$W = -Q_0(\varphi_2 - \varphi_1) = -Q_0\Delta\varphi = -Q_0V_{21} \quad (3.14)$$

Работата на силите на полето може да се запише и како:

$$W = \int_1^2 Q_0 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^2 Q_0 E_s ds \quad (3.15)$$

па од последниве две релации следува дека:

$$V_{21} = (\varphi_2 - \varphi_1) = -\int_1^2 E_s ds \quad (3.16)$$

при што интеграцијата може да се изврши долж било која линија што ги поврзува почетната и крајната точка, бидејќи работата на силите на електростатското поле не зависи од траекторијата.

Ако пробниот полнеж Q_0 од некоја произволна точка се однесе во бесконечност, каде што потенцијалот се смета дека е нула, тогаш и работата на силите на полето согласно (3.12) е:

$$W_\infty = Q_0\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{W_\infty}{Q_0} \quad (3.17)$$

откаде се добива и другиот израз преку кој може да се даде физичкото значење на електричниот потенцијал. **Електричен потенцијал е физичка величина што се определува преку работата што ја вршат**

силите на полето при преносот на позитивен точкест полнеж од таа точка во бескрајност, поделена со големината на пробниот полнеж.

Релацијата (3.17) дава можност да се дефинира единицата за електричен потенцијал. Тоа е волт. Потенцијал од еден волт има точка во дадено електростатско поле во којашто позитивен полнеж од еден кулон има потенцијална енергија од еден џул. Или, ако при пренос на тело со полнеж од еден кулон од дадената точка во бесконечност се врши работа од еден џул, тогаш во дадената точка потенцијалот изнесува еден волт.

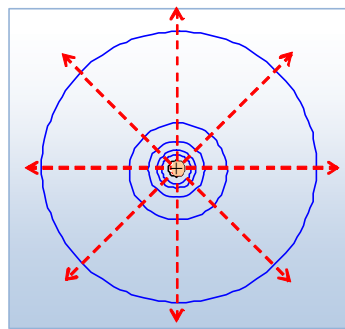
Релацијата (3.16) ја дава разликата во потенцијалите на две точки ($\varphi_2 - \varphi_1 = V_{21}$). Всушност само оваа величина и има практично и мерливо значење. Разликата на потенцијалот се вика **електричен напон**. Значи, *електричен напон меѓу две точки се определува преку работата што треба да се изврши за да еден позитивен единичен електричен полнеж се пренесе од една точка во друга*. Всушност, и тогаш кога зборуваме за електричен потенцијал, подразбираме дека станува збор за **електричен напон помеѓу две точки**: првата е дадената точка, а втората е многу далеку, па сметаме дека е бесконечно оддалечена од првата.

3.3. ЕКВИПОТЕНЦИЈАЛНИ ПОВРШНИ

Во дадено електрично поле сите точки со ист потенцијал лежат на површини кои се нарекуваат **екvipотенцијални површини**. За сликовита претстава, обично се цртаат пресеците на екvipотенцијалните површини со дадената рамнина (рамнина на цртежот) при што се добиваат линии со ист потенцијал, *екvipотенцијални линии*.

Ако извор на полето е точкест полнеж, тогаш екvipотенцијалните површини се концентрични сфери, во чиј што центар е сместен полнежот - извор на полето. На сликата 3.2. е даден рамнински пресек на системот екvipотенцијални површини кај точкест полнеж. Силовите линии се дадени со непрекинати црвени вектори. Како што се гледа од цртежот, *правецот на силиовите линии во секоја точка е нормален на екvipотенцијалната површина*.

Ќе покажеме дека ова е основното својство на силите линии, карактеристично за полето што го создава секое наелектризирано тело со произволна форма.



Сл.3.2. Централен пресек од екvipотенцијални сферни површини.

За да го докажеме ова, на една еквипотенцијалната површина ќе одбереме две блиски точки кои се на меѓусебно растојание ds . Работата што се врши при пренос на пробен полнеж Q_0 долж тоа мало растојание ds според релацијата

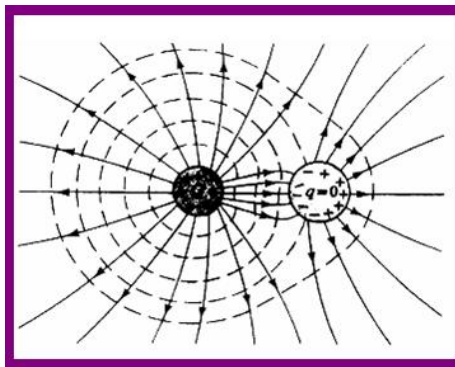
$$dW = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$$

ќе биде еднаква на нула, бидејќи на еквипотенцијална површина $\varphi_1 = \varphi_2$.

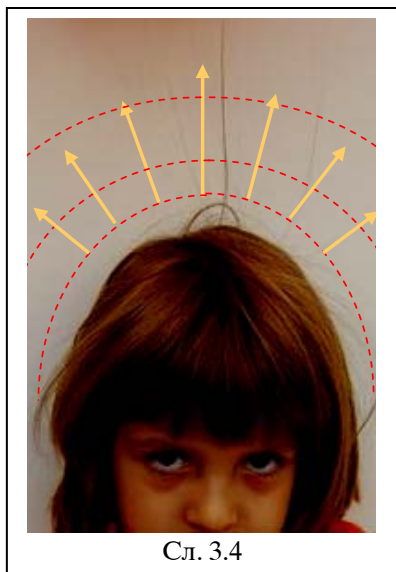
Од друга страна, пак, работата што се врши во електричното поле е дадена со:

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = Q_0 E ds \cos(\vec{E}, d\vec{s}),$$

па за да таа биде еднаква на нула, (бидејќи ниту пробниот полнеж, ниту јачината на полето, ниту ds не се еднакви на нула) треба $\cos(\vec{E}, d\vec{s}) = 0$; што укажува дека аголот меѓу векторот на електричното поле и малото поместување долж еквипотенцијалната површина



Сл.3.3



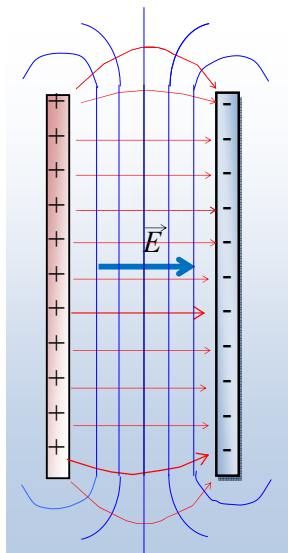
Сл. 3.4

треба да е 90° . Заклучуваме дека **силовите линии се секогаш нормални на еквипотенцијалните површини.**

Ова особина е многу важна бидејќи дозволува да се нацртаат силовите линии ако се познаваат еквипотенцијалните површини и обратно, ако се познати силовите линии да се нацртаат еквипотенцијалните површини.

На сликата 3.3 се дадени силовите линии и еквипотенцијалните површини (линии) добиени од позитивно наелектризирана топка (помалата) која по пат на инфлуенца ја наелектризира поголемата топка.

Сликата 3.4 илустрира силови линии и еквипотенцијални површини околу наелектризирана коса. Влакната на косата на девојчето се поставени во насока на силовите линии, а еквипотенцијалните површини ја следат формата на главата.



Сл. 3.5

На ист начин се црта и сликата на хомогеното поле.

Како што покажавме порано, хомогено поле се создава помеѓу две разноимено наелектризирани плочи со еднаква површинска густина. Силовите линии меѓу плочите се еднакво густе паралелни прави кои започнуваат на позитивно наелектризираната плоча, а завршуваат на негативната. Еквипотенцијалните површини се паралелни рамнини, кои се паралелни со наелектризираните плочи (Сл. 3.5).

Ако еквипотенцијалните површини се цртаат така за да одговараат на еднаков пораст на потенцијалот, тогаш брзината на промената на потенцијалот во правец на силвата линија е обратно пропорционална со растојанието меѓу еквипотенцијалните површини (односно со еквипотенцијалните линии, нацртани во рамнината на цртањето). Значи густината на еквипотенцијалните површини е таму поголема каде што доаѓа до побрза промена на потенцијалот. Тоа најубаво се гледа кај еквипотенцијалните површини на точкест полнеж (слика 3.2).

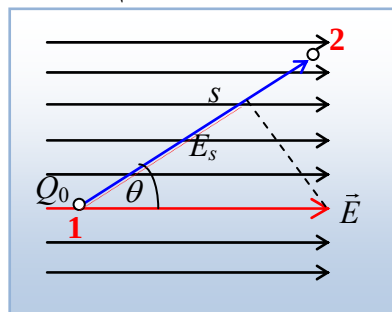
При движење на полнежот од една точка во друга по неговата површина не се врши никаква работа (бидејќи не постои тангенцијална компонента на силата која би го движела пробниот полнеж). Значи, **површината на спроводникот е еквипотенцијална површина.**

Земјата, исто така, може да се смета за еден голем спроводник. Иако во Земјината кора постојат некои слаби струи, најчесто се смета дека полнежите на Земјата се во рамнотежа. Затоа и може да се смета дека сите точки на Земјината површина имаат ист потенцијал и дека тој е еднаков на нула.

3.4. ВРСКА ПОМЕЃУ ВЕКТОРОТ НА ЈАЧИНАТА НА ЕЛЕКТРИЧНОТО ПОЛЕ И ПОТЕНЦИЈАЛОТ

Јачината на електричното поле $\vec{E}$ (вектор) и потенцијалот ϕ (скалар) се физички величини кои го опишуваат електростатското поле. Очигледно е дека меѓу овие две величини мора да постои врска.

За да ја определиме таа врска, ќе претпоставиме, за почеток, дека полето е



Сл. 3.6

хомогено. Нека полнежот Q_0 прави некое поместување s , кое со векторот на полето зафаќа агол θ (види сл. 3.6).

Работата што се врши при преносот на полнежот Q_0 од точката 1 во точката 2 е дадена со:

$$\Delta W = \vec{F}\vec{s} = Fs \cos \theta = Q_0 E \cos \theta \quad s = Q_0 E_s s.$$

Овде E_s е проекцијата на јачината на електричното поле во насока на поместувањето.

Ако во точката 1 потенцијалот е φ_1 а во точката 2 потенцијалот е φ_2 , тогаш истата работа според релацијата (3.14) ќе биде дадена со:

$$\Delta W = -Q_0 (\varphi_2 - \varphi_1) = -Q_0 \Delta \varphi$$

По изедначувањето на двете страни од овие две равенства и скратување со Q_0 за врската помеѓу потенцијалот и јачината на електричното поле се добива:

$$E_s = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \quad (3.18)$$

Знаеме дека $\Delta \varphi = V_{21}$ е напонот меѓу точките 1 и 2. Значи со мерење на напонот меѓу две точки и нивното растојание може да се определи јачината на полето. Обично се мери напонот меѓу наелектризираните плочи што го создаваат хомогеното поле V , па ако растојанието меѓу нив е d , за полето се добива:

$$E = -\frac{V}{d} \quad (3.19)$$

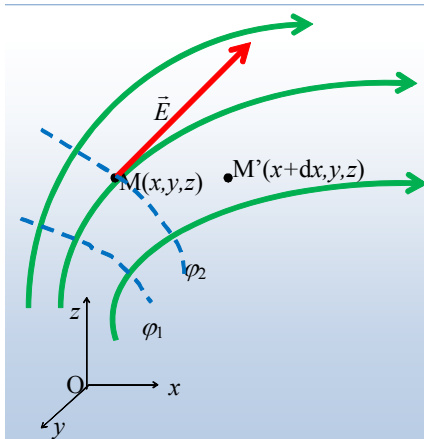
Од оваа релација се гледа дека единицата за јачината на електричното поле е волт врз метар (V/m). Знакот минус во ова равенство укажува на тоа дека потенцијалот долж силовата линија се намалува т.е. дека позитивната плоча е на повисок потенцијал од негативната.

Равенката (3.18) е директна последица на универзалната врска помеѓу силата во насока на некое поместување s и потенцијалната енергија U во некое потенцијално поле:

$$F_s = -\frac{\Delta U}{\Delta s} \quad (3.20)$$

Во **нехомогено поле** потенцијалот φ и полето $\vec{E}$ се функции од координатите - x, y, z (сл. 3.7). За пренесување на Q_0 од точка М во М' се врши работа која е дадена со производот од полнежот и разликата на потенцијалот во x -насока:

$$dW = -Q_0 [\varphi(x + dx, y, z) - \varphi(x, y, z)] = -Q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$



Сл.3.7

Оваа работа може да се запише и преку x -компонентата на полето, така што за пренос на Q_0 на бескрајно малото растојание dx ќе се изврши елементарна работа дадена со:

$$dW = -Q_0 E_x dx,$$

Ако десните страни од овие две равенства се изедначат се добива:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

На сличен начин може да се добијат и y - и z -компонента на векторот на електричното поле $\vec{E}$. Според тоа, за векторот $\vec{E}$ може да се напише:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right] = -\nabla \varphi = -\text{grad} \varphi \quad (3.21)$$

Последната релација кажува дека јачината на електричното поле е еднаква на градиентот на потенцијалот со негативен знак. Во математиката, понекогаш наместо строго дадената врска за градиентот се воведува следниот израз што ние веднаш го применуваме на полето:

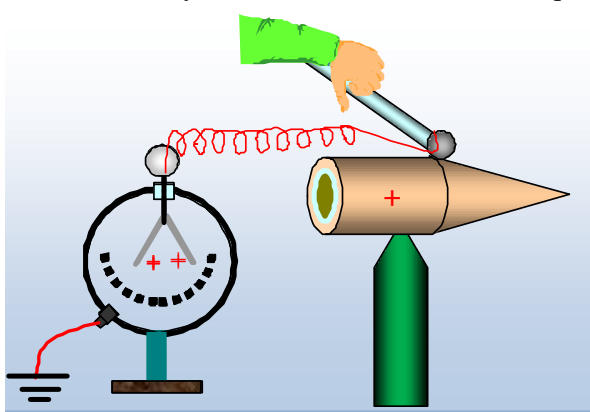
$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds} \quad (3.22)$$

Изводот во ова равенство, всушност, ја искажува брзината со која се менува потенцијалот во даден правец. Гледаме дека проекцијата на векторот на јачината на електричното поле на даден правец (E_s) е еднаква на брзината на промената на потенцијалот со негативен знак. Вака прикажаниот однос се нарекува и градиент на потенцијалот. Релациите (3.21) и (3.22) искажуваат едно те исто.

3.5. МЕРЕЊЕ НА НАПОНОТ И ПОТЕНЦИЈАЛОТ

Напонот меѓу две точки во полето се мери со помош на електрометри, или електростатски волтметри. Постојат различни видови електрометри со кои можат да се мерат и пониски напони. Обичниот електрометар служи за мерење само на високи напони. При мерењето едната точка се поврзува со главата на електрометарот, а другата, со неговото тело. Ако треба да се измери напонот на едно тело во однос на Земјата, тогаш, обично, телото на електрометарот се поврзува со Земјата, а главата на електрометарот со наелектризираното тело чиј напон мериме.

При експериментирањето може лесно да се види дека отклонот на стрелката на електрометарот зависи од напонот донесен помеѓу главата и телото на електрометарот. Меѓу телото и главата (стрелката или ножињата) се јавува електрично поле, кое ги одместува ливчињата. Притоа, отклонот е пропорционален со создаденото поле, т.е. со напонот меѓу главата и телото на електрометарот.



Сл. 3.8. Со електрометар се покажува дека површината на коноцилиндарот е еквипотенцијална (и однатре и однадвор).

Со користење на обичен електрометар може да се покаже дека површината на едно спроводно наелектризирано тело претставува еквипотенцијална површина (сл. 3.8). Ако главата на заземјениот електрометар се поместува за да поврзе било која точка на површината од наелектризираниот спроводник (макар и најсложена да е формата на површината на спроводникот) отклонот на електрометарот останува ист.

Отворот е направен доволно голем за да допирот се направи дури и од внатрешната страна на шупливиот коноцилиндар. Дури и тогаш отклонот ќе биде ист.

3.6. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПОТЕНЦИЈАЛОТ

Равенките (3.10) и (3.14) укажуваат на тоа дека ако полето е создадено од повеќе независни и произволно распределени полнежи, тогаш потенцијалот во секоја негова точка е даден со алгебарска сума на потенцијалите создадени од секој одделен полнеж, т.е.:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (3.23)$$

каде што r_i е растојание меѓу дадената точка во која се бара потенцијалот и полнежот Q_i .

Ако станува збор за поле создадено од тело, тогаш распределбата на полнежите ќе се смета за непрекината, па тогаш:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r} \quad , \quad (3.24)$$

каде што r е растојанието од елементот на полнежот dQ до дадената точка во која се бара потенцијалот. Релацијата (3.24) во случај кога полнежите се волуменски распределени со волуменска густина ρ , која во најопшт случај е функција од координатите, ќе премине во:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho d\tau}{r}, \quad (3.25)$$

при што интеграцијата се врши по сиот волумен V . Овде $d\tau$ е елемент на волуменот во кој е волуменската густина определена со ρ , а r е растојанието од елементот на волуменот до дадената точка во која се бара потенцијалот.

Ако полнежите се распоредени само по површината на телото коешто е извор на полето, треба да се знае зависноста на површинската густина на полнежите (σ) од координатите, па потенцијалот во таа точка се определува со:

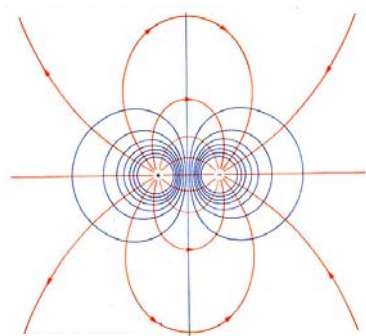
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma dA}{r} \quad (3.26)$$

каде што r е растојанието од елементот на површината dA до дадената точка во која го бараме потенцијалот.

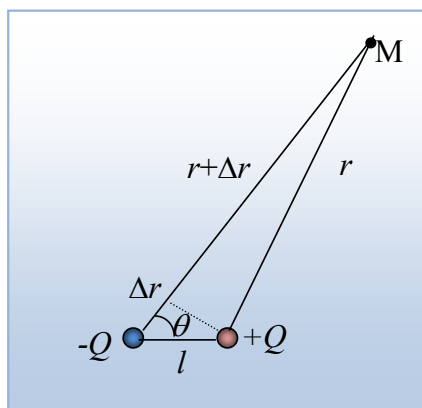
Бидејќи потенцијалот е скаларна величина, тој полесно се определува одколку векторот на јачината на електричното поле $\vec{E}$. Затоа, многу често при испитувањето на електричното поле најпрво се определува потенцијалот, а потоа јачината на полето.

3.6.1. Потенцијал на електричен дипол

Силовите линии и еквипотенцијалните површини нацртани во рамнина на оската на еден електричен дипол и нејзината нормала се дадени на сликата 3.9.



Сл. 3.9



Сл. 3.10

Ќе го пресметаме потенцијалот на диполот во произволна точка М (сл. 3.10). Потенцијалот е збир на потенцијалите создадени од двата полнежа од диполот:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r + \Delta r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta r}{r(r + \Delta r)}$$

Бидејќи $\Delta r = l \cos \theta$, а $Ql = p_e$, во оваа равенка, ако станува збор за точки кои се многу оддалечени и за кои важи $r \gg l$, во именителот Δr може да се занемари, па за потенцијалот се добива

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r(r + \Delta r)} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r(r + \Delta r)} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

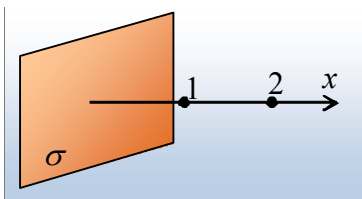
Како што се гледа, потенцијалот е обратнопропорционален со квадратот на растојанието до диполот. Притоа, позитивен е за $0 < \theta < 90^\circ$, а негативен е при $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

3.7. ПРИМЕРИ ЗА ПРЕСМЕТУВЕЊЕ НА ПОТЕНЦИЈАЛ ПРЕКУ ЈАЧИНАТА НА ЕЛЕКТРИЧНОТО ПОЛЕ

3.7.1. Потенцијал на рамномерно наелектризирана бескрајна рамнина

Веќе два пати го пресметавме полето на бескрајна рамнина што е рамномерно наелектризирана со површинска густина σ и покажавме дека е тоа хомогено, насочено нормално на рамнината со големина која е дадена со: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Сега не интересира каков напон постои помеѓу

две точки 1 и 2 кои се на растојанија x_1 и x_2 од рамнината (сл. 3.10). Имајќи ја предвид релацијата (3.22), овде може да се запише:



Сл. 3.10

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, \text{ или } d\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx$$

која требаа да се интегрира од положбата 1 до 2:

$$d\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx$$

или, ако се побара неопределен интеграл се добива изразот

$$\varphi = -\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx + C \Rightarrow \varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x + C.$$

Ако за самата рамнина важи дека при $x=0$, $\varphi = \varphi_0$, се добива $C = \varphi_0$. Следува дека потенцијалот опаѓа линеарно со растојанието, т.е.:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \varphi_0.$$

3.7.2 Потенцијал на рамномерно наелектризирана сфера

Јачината на полето создадено од рамномерно наелектризираната сфера веќе беше предмет на проучување (види поглавје 2.3.3). Притоа, покажавме дека јачината на полето за точки надвор од една наелектризирана сфера со радиус r_0 е:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

при што Q е вкупниот полнеж на сферата, а r растојание од центарот на сферата до точката во која го испитуваме полето.

Имајќи ги предвид релацијата (3.22) и сферната симетрија на проблемот следува:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow \varphi = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} + C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int -\left(\frac{dr}{r^2}\right) + C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + C$$

Под претпоставка дека при $r \rightarrow \infty$, потенцијалот $\varphi=0$, следува дека интеграционата константа $C=0$. Резултатот за потенцијалот на точките надвор од сферата е ист како целиот полнеж да е сместен во центарот на сферата (како кај точкест полнеж):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

На површината на самата сфера, пак, за која важи $r=r_0$ потенцијалот е еднаков на

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_0}.$$

Овој резултат важи за сфера од спроводник, но и за сфера од изолатор. Сепак, за точките во внатрешноста на сферата, состојбата е поинаква:

а) За точките кои се наоѓаат во внатрешноста на *сферата-спроводник* полето $E=0$. А потенцијалот е:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \Rightarrow \varphi = -\int E dr + C = 0 + C = C.$$

Излегува дека потенцијалот во внатрешноста на сферата потенцијалот е константен и еднаков на потенцијалот на површината (потенцијалот што се добива при $r=r_0$):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}.$$

Значи не само за точките од површината, туку и точките од внатрешноста на сферата потенцијалот е константен.

б) Ако сферата е од изолатор, тогаш јачината на полето е дадена со релацијата:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} r, \Rightarrow \varphi = -\int E dr + C = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \frac{r^2}{2} + C.$$

Со замена на граничната вредност $r=r_0$ и $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}$ за интеграционата константа се добива:

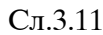
$$C = \frac{3Q}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r_0}$$

По средувањето, за потенцијалот на точките од внатрешноста се добива:

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r_0} \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right).$$

На сликата 3.11а, е даден графикот на промената на јачината на електричното поле и потенцијалот кај сфера - спроводник во зависност од растојанието од центарот. На сликата 3.11б е дадена зависноста на јачината на полето и потенцијалност од растојанието кај сфера-изолатор. Очигледно е дека постои разлика кај јачината на полето за точките од внатрешноста на наелектризираната топка.

Кај изолаторите и во внатрешноста на сферата постојат полнежи, па следува дека постои поле, додека кај спроводниците во внатрешноста волуменската густина во секоја точка е еднаква на нула, па и јачината на полето е еднакво на нула.



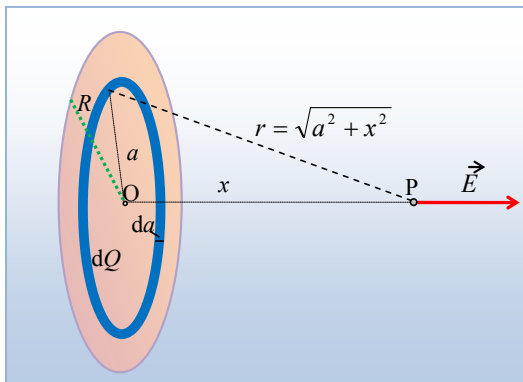
елемент од прстенот е распределен елементарен полнеж dQ . Ако се искористи релацијата за потенцијалот за точкест полнеж dQ , тогаш за потенцијалот во точката P ше ќе се добие:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \int dQ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\varphi}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + x^2)}$$

Пример задача 2

Полнежот Q рамномерно е распределен по тенок диск со радиус R . Определете го потенцијалот во точка P што се наоѓа на оската на дискот на растојание x од него.



Сл. 3.13

Од оваа равенка следува дека:

$$dQ = \frac{2Q}{R^2\pi} ada,$$

па за потенцијалот во точката P се добива:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int \frac{ada}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \sqrt{a^2 + x^2} \Bigg|_{a=0}^{a=R} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{R^2 + x^2} - x \right]$$

2.9. ПРИМЕРИ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ЈАЧИНА НА ЕЛЕКТРИЧНО ПОЛЕ ПРЕКУ ПОТЕНЦИЈАЛОТ

Многу често, од познатиот потенцијал се бара да се определи јачината на електричното поле.

Решение:

Дискот мисловно го расчленуваме на елементарни прстени со шиточина da кои носат полнеж dQ . Бидејќи полнежот Q е рамномерно распределен, тогаш за површинската густина на полнежот ќе важи:

$$\frac{dQ}{2\pi ada} = \frac{Q}{R^2\pi}$$

Ќе објасниме како се прави тоа. Знаеме, според релацијата (3.22) дека меѓу полето и потенцијалот постои релацијата:

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds}$$

според која E_s - компонента на јачината на полето во насока на поместување ds е градиент на потенцијалот во таа насока, земен со негативен знак. Градиентот одговара на најбрзата промена на потенцијалот.

Според кажаното може од познатиот потенцијал да се определи јачината на полето.

Пример 1

Да се определи јачината на полето во точка што лежи на оската на еден наелектризиран прстен, ако прстенот има радиус a , а точката е на растојание x од центарот на прстенот (види сл. 3.12).

Решение:

Во примерот 1. од претходното поглавје е определен потенцијалот во овој случај и даден е со :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Компонентата на полето во x -насока (y - и z -компоненти се еднакви на нула) е дадена со:

$$E_x = -\frac{\partial\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}}\right)}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(a^2 + x^2)^{3/2}}, \text{ што е резултат кој}$$

веќе го имаме добиено во едно од претходните поглавја.

Пример 2

Да се определи јачината на електричното поле создадено во точка што се наоѓа на оската на наелектризиран диск со радиус R и рамномерно распределен полнеж Q , ако растојанието на точката до дискот е x .

Решение:

Задачата се надоврзува на примерот 2 од претходното поглавје, според кое за потенцијалот добивме:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{R^2 + x^2} - x \right].$$

E_x компонента ја добиваме од:

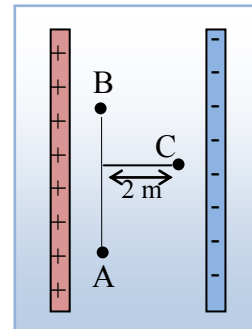
$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right].$$

Со помош на овој резултат можеме да го пресметаме и полето создадено во близина на една наелектризирана рамнина, ако се претпостави дека $x \ll R$. Во тој случај за полето се добива:

$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{R^2 \pi \sigma}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, каде што σ е површинска густина на наелектризираниот диск.

ПРАШАЊА и ПРОБЛЕМИ

1. Колкава работа врши полето ако полнеж од $+2 \mu\text{C}$ се движи долж правата АВ со должина 3 m (сл.3.14)? Колкава работа се врши ако полнежот се помести во точката С?



Сл. 3.14

2. Во лабораторија со помош на електростатска машина е наелектризирана една изолирана сфера. Колкава работа се врши ако една истоимено наелектризирана пробалка се движи по површината на сферата? Каква е работата ако се донесела разноимено наелектризирана пробалка?

(Напомена полнежот на пробалката и во обата случаја е значително помал од оној на сферата? Размислете дали е оваа напомена од значење?)

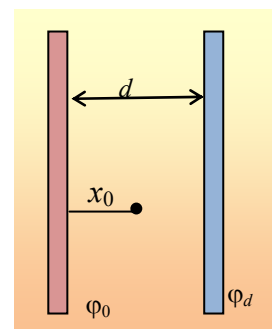
Пример задачи

3. Определете го потенцијалот во точка М која се наоѓа на растојание $x=x_0$ од левата рамнина ако двете рамнини се на различен потенцијал (види слика 3.15).

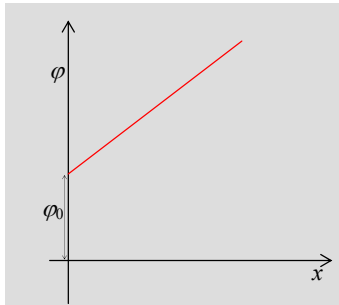
Решение:

Полето меѓу две рамнини со различен потенцијал е хомогено и неговата јачина има големина:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Сл.3.15а



Сл.3.15б

Разликата во потенцијалите (напонот) V меѓу плочите, ако растојанието меѓу плочите е d (слика 3.15) ќе биде:

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Ако при $x=0$, $\varphi=\varphi_0$, за потенцијалот во која и да било точка определена со координата x се добива:

$$\varphi = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx + C = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x + C \quad \text{бидејќи за } x=0 \quad \varphi = \varphi_0$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x + \varphi_0$$

што кажува дека потенцијалот линеарно расте (Сл.3.15б) во зависност од x . Соопред тоа на местото $x = x_0$ тој ќе биде:

$$\varphi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x_0 + \varphi_0.$$

4. Определете ја потенцијалната разлика меѓу две точки на растојание r_1 и r_2 од оската на еден спроводен бесконечен цилиндар, наелектризиран со површинска густина на единица должина од цилиндарот λ (слика 3.16).

Решение:

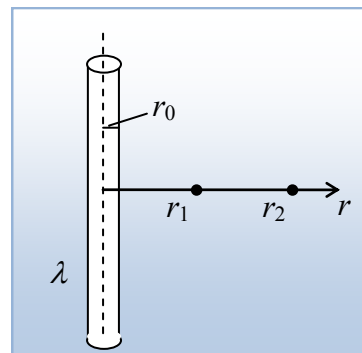
Полето надвор од цилиндарот е исто како и полето создадено од бесконечен линиски спроводник со линиска густина λ :

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r},$$

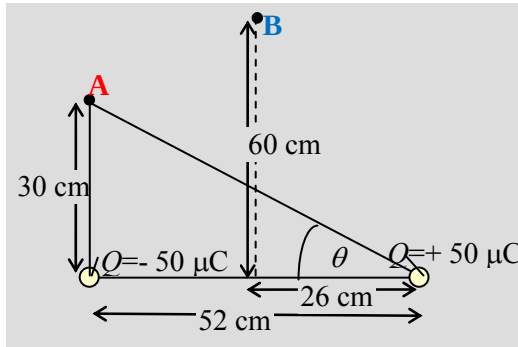
при што се зема дека $r > r_0$ на цилиндарот.

Потенцијалната разлика меѓу двете точки, оддалечени од оската на цилиндарот на растојанија r_1 и r_2 (r_1 и $r_2 > r_0$) ќе биде:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$



Сл. 3.16



Сл.3.17

5. Определете го потенцијалот во точките А и В од сликата 3.17 ако полнежите кои го создаваат полето Q_1 и Q_2 и нивното меѓурастојание ги имаат вредностите како на сликата.

Решение:

За точката А:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2}$$

$$\varphi_{A1} = \frac{-50 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,30}$$

$$\varphi_{A2} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{0,30^2 + 0,52^2}} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,60}$$

$$\varphi_A = -\frac{1}{2} \varphi_{A1} = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{50 \cdot 10^{-6}}{0,30} = 37,5 \cdot 10^4 \text{ V}$$

За точката В:

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2}$$

$$\varphi_{B1} = \frac{-50 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{0,60^2 + 0,26^2}}$$

$$\varphi_{B2} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{0,60^2 + 0,26^2}}$$

Бидејќи станува збор за еднакви потенцијали со спротивен знак

$$\varphi_B = 0.$$

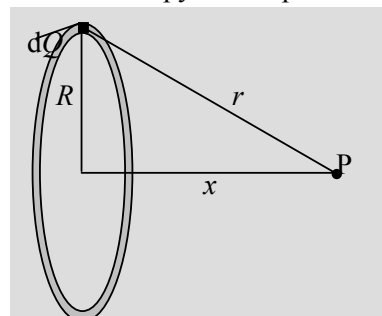
5. Полнежот Q е рамномерно распределен по тенок кружен спроводник со радиус R . Определете го потенцијалот во точката Р што лежи на оската, на растојание x од неговиот центар (слика 3.18).

Решение:

Сите точки од кругот се еднакво оддалечени од точката Р на растојание:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

Ако се искористи формулата за потенцијалот на точкестиот полнеж dQ , тогаш:

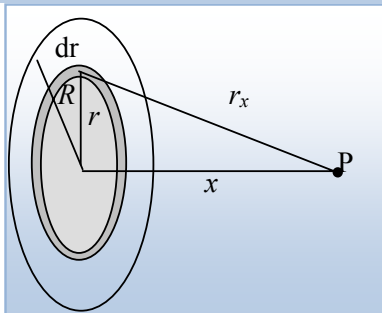


Сл.3.18

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \int dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} Q.$$

6. Полнежот Q е рамномерно распределен по тенок диск со радиус R (слика 3.19). Определете го потенцијалот во точката P што се наоѓа на оската на дискот на растојание x од неговиот центар.

Решение:



Сл.3.19

Дискот се разбива на елементарни прстени со дебелина dr и полнеж dQ . Бидејќи е полнежот рамномерно распределен ќе важи:

$$\frac{dQ}{2\pi r dr} = \frac{Q}{\pi R^2} \Rightarrow dQ = \frac{2Qr dr}{R^2},$$

Тогаш потенцијалот во точката $P(x)$ ќе може да се определи според:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r_x} \\ \varphi &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{[x^2 + R^2]^{1/2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} [x^2 + R^2]^{1/2} \Big|_{r=0}^{r=R} \\ \varphi &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[(x^2 + R^2)^{1/2} - x \right]. \end{aligned}$$