

ГЛАВА 05

Постојана струја, Омов закон

1. Струјата во еден спроводник се менува со времето според равенката $I = 4 + 2t$ каде I е во ампери а t во секунди. Колкав полнеж поминува низ напречниот пресек на спроводникот во интервалот од $t_1 = 2\text{ s}$ до $t_2 = 6\text{ s}$. За која јачина на струјата би поминал ист толкав полнеж за истото време.

Услови:

$$I = 4 + 2t \quad \begin{matrix} I[\text{A}] \\ t[\text{s}] \end{matrix}$$

$$t_1 = 2\text{ s}$$

$$t_2 = 6\text{ s}$$

$$Q = ?$$

Решение:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$dQ = I dt$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} (4 + 2t) dt$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} 4 dt + \int_{t_1}^{t_2} 2t dt$$

$$Q = 4 \cdot t \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2t^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$Q = 4(t_2 - t_1) + t_2^2 - t_1^2$$

$$Q = 4 \cdot (6 - 2) + 6^2 - 2^2$$

$$Q = \underset{16}{4 \cdot 4} + \underset{32}{36} - 4 \quad [\text{A}]$$

$$\boxed{Q = 48 \text{ A}}$$

2. Да се определи полнежот кој минува низ спроводник со отпор 3Ω при рамномерен пораст на напонот на неговите краеве од $U_0 = 2V$ до $U_1 = 4V$ за време од $t = 20s$.

Услови:

$$R = 3\Omega$$

$$U_0 = 2V$$

$$U_1 = 4V$$

$$t = 20s$$

$$Q = ?$$

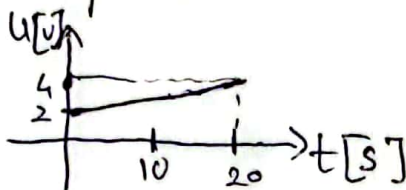
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$dQ = I dt$$

$$Q = \int_0^{t_2} I dt$$

Решение:

I. Се бара р-ката на линеарната промена на U .



$$\Delta U = U_1 - U_0 = 4V - 2V = 2V$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 20s$$

$$k = \tan \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{2V}{20s} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Р-ка на права

$$y = y_0 + k(x) \rightarrow t$$

$$U = U_0 + kt$$

$$\text{Омов закон} \\ U = IR$$

$$U = 2 + 0,1t$$

II

Се бара временската промена на струјата I

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1}{3} (2 + 0,1t)$$

$$Q = \int_0^{20} \frac{1}{3} (2 + 0,1t) dt = \frac{1}{3} \int_0^{20} 2 dt + \frac{1}{3} \int_0^{20} 0,1t dt = \frac{2}{3} \cdot t \Big|_0^{20} + \frac{0,1}{6} t^2 \Big|_0^{20}$$

$$Q = \frac{400}{3} + \frac{40}{6} = \frac{840}{6} = 14C$$

$$Q = 14C$$

3. Со мерење на електричниот отпор на некој спроводник на температура $t_1 = 15^\circ\text{C}$ и $t_2 = 90^\circ\text{C}$, се добиле вредностите $R_1 = 25\Omega$ и $R_2 = 32,4\Omega$ соодветно. Да се определи температурниот коефициент на отпорот α и отпорот на спроводникот на 0°C .

Услови:

$$t_1 = 15^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 90^\circ\text{C}$$

$$R_1 = 25\Omega$$

$$R_2 = 32,4\Omega$$

$$\alpha = ?$$

$$R_0 = ? \text{ } R[^\circ\text{C}]$$

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$$

$$R_0 = \frac{R_1}{1 + \alpha t_1}$$

$$R_0 = \frac{25}{1 + 6,1 \cdot 10^{-3} \cdot 15}$$

$$R_0 = \frac{25}{1 + 0,091} = \frac{25}{1,091} = 22,9\Omega$$

$$R_0 = 22,9\Omega$$

Решение:

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1)$$

$$R_2 = R_0(1 + \alpha t_2)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}$$

$$\frac{25}{32,4} (1 + 90\alpha) = 1 + 15\alpha$$

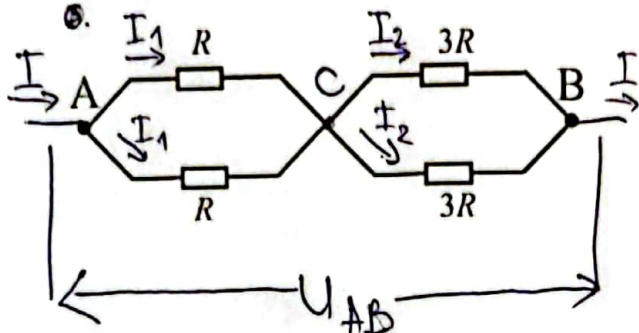
$$0,77 + 0,77 \cdot 90\alpha = 1 + 15\alpha$$

$$0,77 + 69,4\alpha = 1 + 15\alpha$$

$$54,4\alpha = 0,23$$

$$\alpha = \frac{0,23}{54,4} = 4,1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

4. Да се најде еквивалентниот отпор на шемата (схемата), ако напонот U_{AB} е донесен помеѓу точките А и В. ДА СЕ НАЈДЕ СЛУЧАЈАТ I_1 и I_2 ? Како поинаку и поедноставно би се добил истиот $R_{екв}$ од истите компоненти?



$$I: \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$$

$$R_{AC} = \frac{R}{2}$$

$$R_{AC} = ?$$

$$R_{CB} = ?$$

$$R_{екв} = R_{AC} + R_{CB}$$

$$U_{AB} = I R_{екв}$$

$$I = \frac{U_{AB}}{R_{екв}} = \frac{U_{AB}}{2R}$$

i) $I = I_1 + I_1 = 2I_1$

$$I_1 = \frac{I}{2} = \frac{U_{AB}}{4R}$$

ii) $I = I_2 + I_2 = 2I_2$

$$I_2 = \frac{I}{2} = \frac{U_{AB}}{4R}$$

$$II \quad \frac{1}{R_{CB}} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R}$$

$$\frac{1}{R_{CB}} = \frac{2}{3R} \Rightarrow R_{CB} = \frac{3}{2}R$$

$$R_{екв} = R_{AC} + R_{CB} = \frac{R}{2} + \frac{3}{2}R = 2R$$

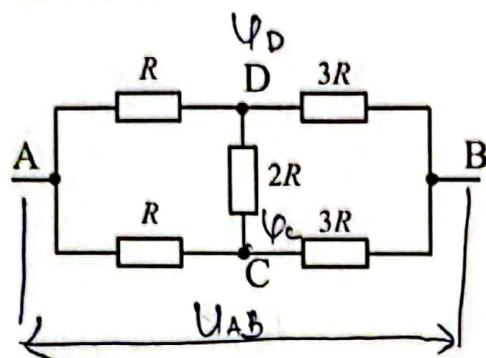
$$R_{екв} = 2R$$

поедноставно е серија



$$R_{екв} = R + R = 2R$$

6. Да се определи еквивалентниот отпор на шемата, ако напонот се донесе помеѓу точките A и B.



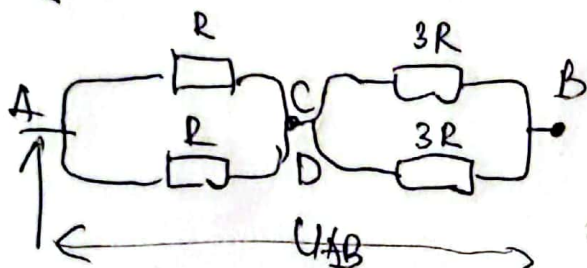
$$R_{\text{equiv}} = ?$$

ПОРАДИ СИМЕТРИЈАТА

ВО ГОРАНАТА И ДОЛНАТА ГРАНКА (ВО
ПАДОТ НА НАПОНОТ ВО D И C Е ИСТ

$$\phi_D = \phi_C \Rightarrow \text{C и D се КРАТОК СПОЈ}$$

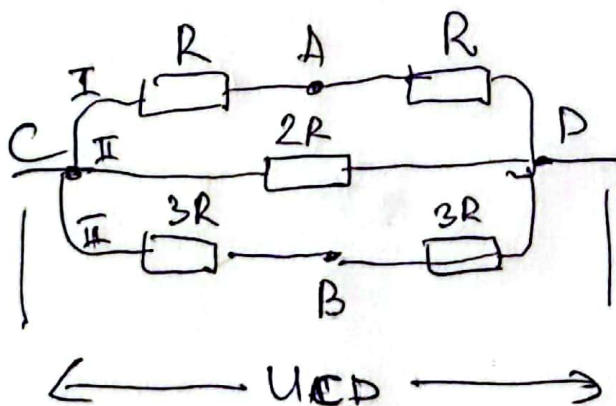
НА ШЕМАТА СТАНУВА



$$R_{\text{equiv}} = R_{AC} + R_{CB}$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{R}{2} + \frac{3R}{2} = \frac{4R}{2} = 2R$$

7. Да се реши претходната задача ако напонот е донесен помеѓу точките C и D!



$$R_{\text{equiv}}(CD) = ?$$

ГРАНКА ~~II~~ I: $R_I = R + R = 2R$

ГРАНКА II: $R_{II} = 2R$

ГРАНКА III: $R_{III} = 3R + 3R = 6R$

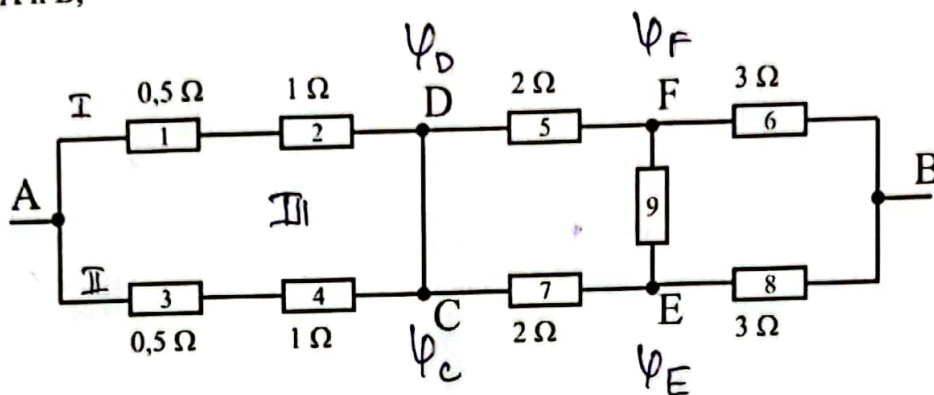
$$\frac{1}{R_{\text{equiv}}} = \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} + \frac{1}{R_{III}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{6R}$$

$$\frac{1}{R_{\text{equiv}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{6R} = \frac{6+1}{6R} = \frac{7}{6R}$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{6}{7} R$$

8. Да се најде еквивалентниот отпор на колото на сликата подолу ако електричниот извор се врзе помеѓу точките:

- (а) помеѓу А и В,
(б) С и D,
(в) Е и F.

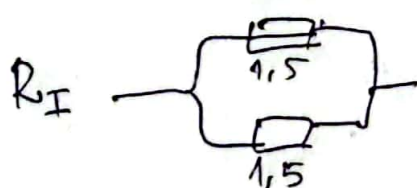
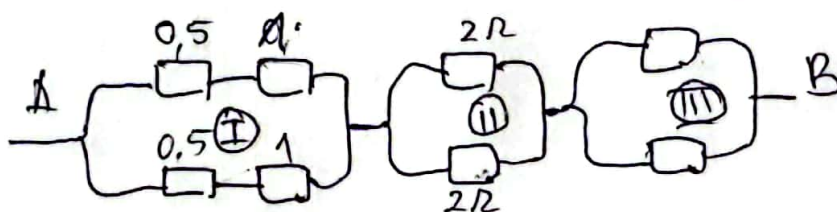


$$\varphi_D = \varphi_C$$

$$\varphi_F = \varphi_E$$

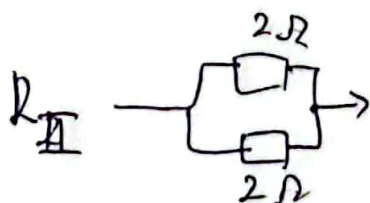
отпорот 9
како да не
постои

CD - крат спој
FE - крат спој

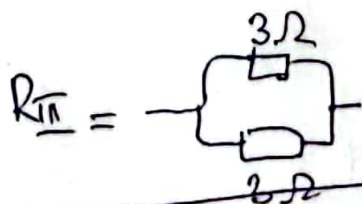


$$\frac{1}{R_I} = \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,5}$$

$$R_I = \frac{3}{4} \Omega = 0,75 \Omega$$



$$R_{II} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \Omega$$

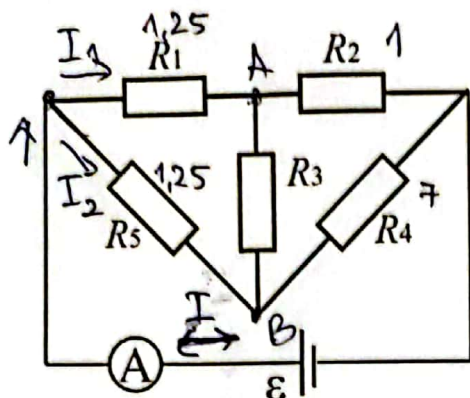


$$R_{III} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = \frac{9}{6} = 1,5 \Omega$$

сериски: $R_{\text{екв}} = R_I + R_{II} + R_{III} = 0,75 + 1 + 1,5 = \underline{\underline{3,25 \Omega}}$

$$R_{\text{екв}} = 3,25 \Omega$$

9. Колкава е струја ќе покаже амперметарот на шемата ако $R_1 = 1,25 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_5 = 1,25 \Omega$ и $R_4 = 7 \Omega$, а електромоторната сила е $\varepsilon = 2,8 \text{ V}$, а внатрешниот отпор на изворот е $0,2 \Omega$.



Услови:

$$R_1 = 1,25 \Omega \quad r = 0,2 \Omega$$

$$R_2 = 1 \Omega$$

$$R_3 = 3 \Omega$$

$$R_4 = 7 \Omega \quad R_5 = 1,25 \Omega$$

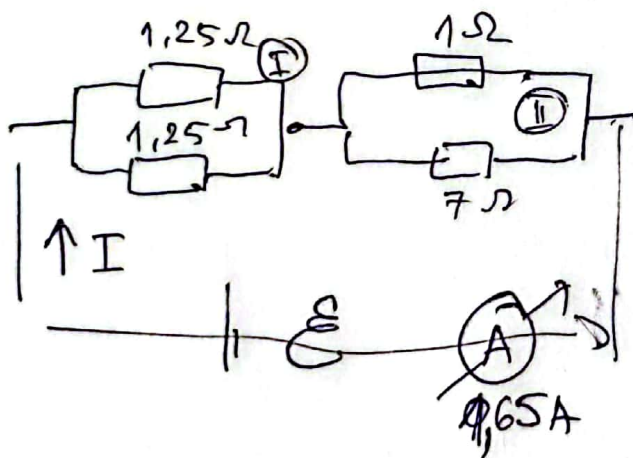
$$\varepsilon = 2,8 \text{ V}$$

$$I = ?$$

Решение:

$$\varphi_A = \varphi_B$$

R_3 — како да не постои
и $\varepsilon = \text{KYS}$ спој



$$R_I = \frac{1,25 \cdot 1,25}{2,5} = 0,625 \Omega \quad R_{II} = \frac{1 \cdot 7}{1+7} = \frac{7}{8} = 0,875 \Omega$$

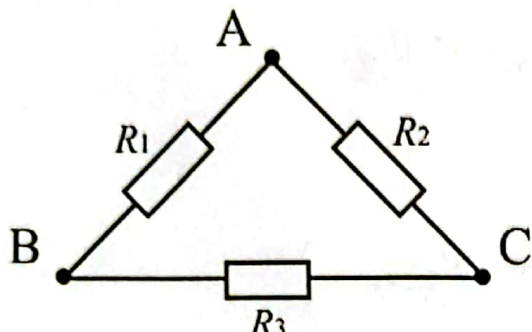
$$R_{\text{equiv}} = R_I + R_{II} = 1,5 \Omega$$

$$\varepsilon = I(R_{\text{equiv}} + r)$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{equiv}} + r} = \frac{2,8}{1,5 + 0,2} = \frac{2,8}{1,7}$$

$$I = 1,65 \text{ A}$$

10. Три отпорника се врзани како на сликата. Ако се вклучи извор, помеѓу точките А и В шемата има отпор $20\ \Omega$. Ако изворот се вклучи помеѓу точките А и С, шемата има отпор $15\ \Omega$. Да се определат вредностите на отпорниците ако се знае дека $R_1 = 2R_2$.

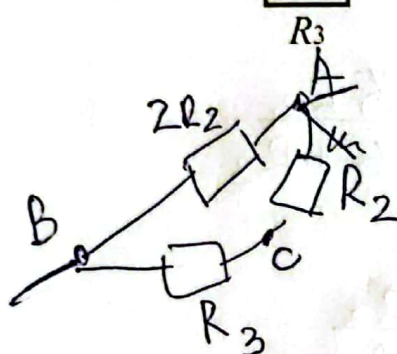


Услови:

$$U_{AB}: R_{AB} = 20\ \Omega$$

$$R_1 = 2R_2$$

$$U_{AC}: R_{AC} = 15\ \Omega$$



I

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_3 + R_2}$$

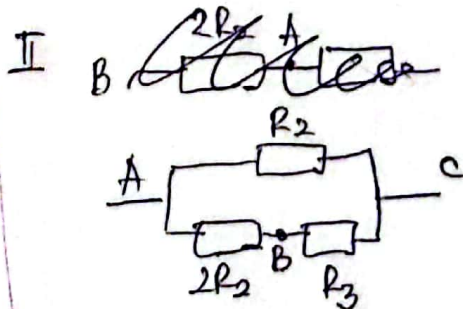
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_3 + R_2}$$

$$\frac{1}{10 \cdot 20} = \frac{1}{2R_2} + \frac{2R_2}{2(R_3 + R_2)}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{R_3 + R_2 + 2R_2}{R_2(R_2 + R_3)}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{R_3 + 2R_2}{R_2^2 + R_3R_2}$$

$$\neq R_2^2 + R_3R_2 = 10R_3 + 20R_2 \quad (I)$$



$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{2R_2 + R_3 + R_2}{R_2(2R_2 + R_3)} = \frac{3R_2 + R_3}{R_2(2R_2 + R_3)}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{3R_2 + R_3}{R_2(2R_2 + R_3)}$$

$$2R_2^2 + R_2R_3 = 45R_2 + 15R_3 \quad (II)$$

Две p-ки со 2 неизвестными R_2 и R_3

$$\text{I} \quad R_2^2 + R_2 R_3 = 10R_3 + 20R_2 \quad | \cdot 2 \quad \swarrow$$

$$\text{II} \quad \underline{2R_2^2 + R_2 R_3 = 45R_2 + 15R_3}$$

$$+ R_2 R_3 = 20R_3 + 40R_2 - 45R_2 - 15R_3$$

$$R_2 R_3 = 5R_3 - 5R_2$$

$$\cancel{\frac{R_2 R_3}{R_3}} = R_3 - R_2 \Rightarrow R_3 = R_2 + 5$$

$$R_2(R_3 + 5) = 5R_3 \Rightarrow R_2 = \frac{5R_3}{5 + R_3} \quad \text{I}$$

$$\text{I.} \quad \frac{25R_3^2}{(5+R_3)^2} + \frac{5R_3^2}{5+R_3} = 10R_3 + \frac{100R_3}{5+R_3} \quad \Rightarrow ?$$

11. Светилка со волфрамово влакно има моќност 40 W, кога ќе се приклучи на напон од 200 V. Колкава е должината на влакното, ако неговиот дијаметар е 0,01 mm а неговата работна температура е 2700 °C? (Специфичниот електричен отпор на волфрамот е 0,05 μΩ · m а термичкиот коефициентот на отпорот е 1/273,15 °K)

Услови:

$$P = 40 \text{ W}$$

$$V = 200 \text{ V}$$

$$d = 0,01 \text{ mm} = 10^{-5} \text{ m}$$

$$\rho = 0,05 \mu\Omega = 5 \cdot 10^{-8} \Omega$$

$$T = 2700^\circ \text{C}$$

$$\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$R_{(2700^\circ \text{C})} = ?$$

$$R_{(2700^\circ \text{C})} = R_0(1 + \alpha t)$$

$$R_{(2700)} = R_0 \left(1 + \frac{2700}{273}\right) \approx R_0(1 + 10) \approx 11R_0$$

$$R_0 = \rho \frac{l}{S}$$

$$l = \frac{R_0 S}{\rho}$$

$$P = I \cdot V \quad I = \frac{V}{R}$$

$$P = \frac{V^2}{R_{(2700^\circ \text{C})}}$$

$$R_{2700} = \frac{V^2}{P} = \frac{40000}{40} = 1000 \Omega$$

$$S = ?$$

$$S = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$S = \frac{3,14}{4} \cdot 10^{-10} [\text{m}^2]$$

$$S = 0,78 \cdot 10^{-10} [\text{m}^2]$$

$$l = ?$$

$$R_{2700} = 11 R_0$$

$$\frac{1000}{11} = R_0 \Rightarrow R_0 = 91 \Omega$$

Реш

$$l = \frac{R_0 \cdot S}{\rho} = \frac{91 \cdot 0,78 \cdot 10^{-10}}{5 \cdot 10^{-8} \Omega} = \frac{0,91 \cdot 0,78}{5} [\text{m}]$$

$$l = 0,14 \text{ m} = 14 \text{ cm}$$

12. Прстен од спроводник е вклучен во коло низ кое тече струја со јачина $I = 9\text{ A}$. Контактите го делат периметарот во однос 1:2. Притоа, во прстенот се развива моќност $P_1 = 108\text{ W}$. Колкава моќност ќе се развие при иста струја во кругот, ако контактите се постават дијаметрално спротивно еден на друг?

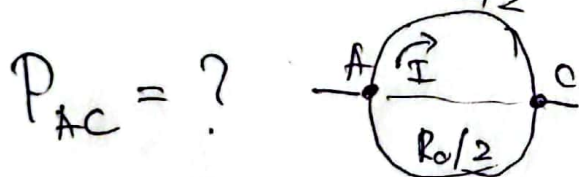
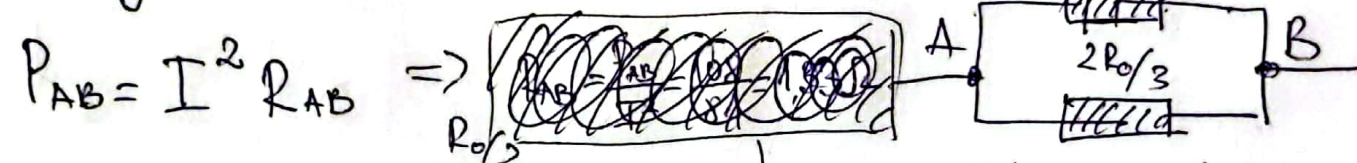
Услови:

$$I = 9\text{ A} \quad P_1 = P_{AB} = 108\text{ W}$$

1:2 однос на e

Ако земеме дека отпорот на целиот прстен $e = R_0$

$$P_{AB} = I^2 R_{AB} \Rightarrow$$



$$P_{AC} = ?$$

$$R_{AB} = \frac{R_0/3 \cdot 2R_0/3}{R_0}$$

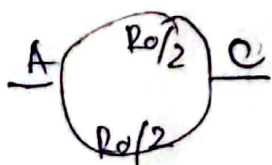
$$R_{AB} = \frac{2}{9} R_0$$

$$P_{AB} = I^2 R_{AB}$$

$$108 = 81 \cdot \frac{2}{9} R_0$$

$$R_0 = \frac{108}{18} = 6\Omega$$

Ако прстенот има контакти дијаметрално A и C

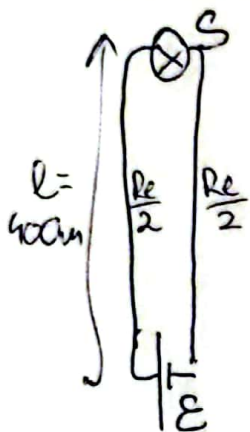


$$R_{AC} = \frac{\frac{R_0}{2} \cdot \frac{R_0}{2}}{\frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2}} = \frac{\frac{R_0^2}{4}}{R_0 \cdot 1} = \frac{R_0}{4}$$

$$R_{AC} = \frac{R_0}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5\Omega$$

$$R_{AC} = 1,5\Omega$$

13. На еден извор на права струја со електромоторна сила $\mathcal{E} = 140\text{ V}$ е приклучена светилка која се наоѓа на $L = 400\text{ m}$ од изворот. Светилката има работен напон $U = 120\text{ V}$ и моќност $P = 100\text{ W}$. За колку ќе се промени падот на напонот на светилката, ако паралелно на неа се приклучи уште една таква светилка? Напречниот пресек на бакарниот спроводник е $S = 0,6\text{ mm}^2$ со $\rho_{\text{Cu}} = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.



$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= 140\text{ V} \\ U_s &= 120\text{ V} \\ L &= 400\text{ m} \\ P &= 100\text{ W} \\ S &= 0,6\text{ mm}^2 = 0,6 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2 \\ \rho_{\text{Cu}} &= 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$R_e = \rho_{\text{Cu}} \frac{L}{S} = 1,68 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{800}{0,6 \cdot 10^{-6}}$$

$$R_e = 22,4 \Omega$$

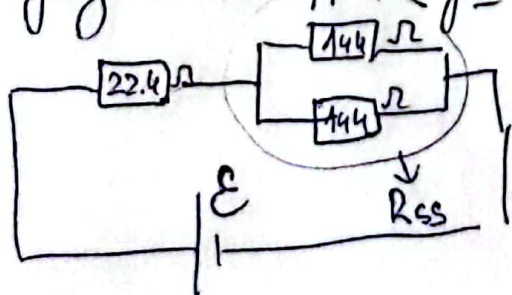
Одгов. закон за цел струен круг:

$$\mathcal{E} = I(R_e + R_s) \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_e + R_s}$$

$$I = \frac{140}{22,4 + 144} = \frac{140}{166,4} = 0,84\text{ A}$$

$$I = 0,84\text{ A}$$

Со додавање // на уште една светилка

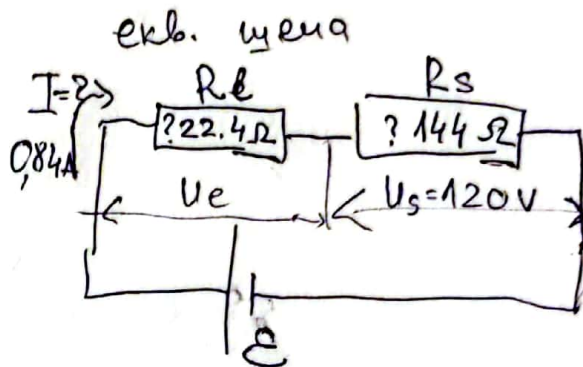


$$R_{ss} = \frac{144 \cdot 144}{2288} = 77 \Omega$$

Потенциометарско мерење

$$U_{ss} = \mathcal{E} \cdot \frac{R_{ss}}{R_{ss} + R_e} = 140 \cdot \frac{77}{77 + 22,4} = 108\text{ V}$$

$$\Delta U_s = U_{s0} - U_{ss} = 120 - 108 = 12\text{ V}$$



R_e - отпор од жицата
 R_s - од светилката

$$R_e = ?$$

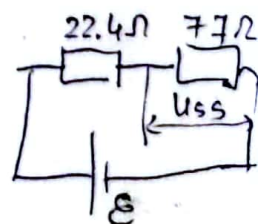
$$R_s = ?$$

$$P_s = I U_s = \frac{U_s^2}{R_s} \Rightarrow$$

$$R_s = \frac{U_s^2}{P_s} = \frac{120^2}{100} = 144 \Omega$$

U_s - напон која има една светилка S

U_{ss} - напон која има две светилки SS



14. На извор на струја е приклучен потрошувач со отпор R на кој се развива моќност P . Кога на тој потрошувач ќе се приклучи уште еден ист таков, вкупната развиена моќност не се менува. Колкав е внатрешниот отпор на изворот на струја, а колкава е неговата електромоторна сила?

Услови:
 R
 P

?

15. Електрично решо и греалка се врзани во серија и приклучени на напон од 200 V. Моќноста на решото е 500 W, а на неговите краеве напонот е 80 V. Да се определи отпорот на греалката и нејзината моќност.

Услови:

$$\mathcal{E} = 200 \text{ V}$$

$$P_R = 500 \text{ W}$$

$$U_R = 80 \text{ V}$$

$$R_G = ?$$

$$P_R = U_R I \Rightarrow$$

$$I = \frac{P_R}{U_R} = \frac{500}{80} = 6,25 \text{ A}$$

$$\boxed{I = 6.25 \text{ A}}$$

$$R_R = ?$$

$$P_R = \frac{U_R^2}{R_R}$$

$$R_R = \frac{U_R^2}{P_R} = \frac{80^2}{500} = 12.8 \Omega$$

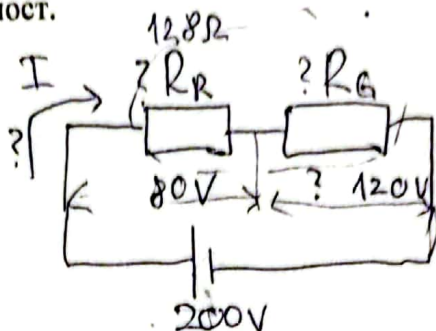
$$R_R = 12.8 \Omega$$

$$\mathcal{E} = I(R_R + R_G)$$

$$\mathcal{E} = IR_R + IR_G$$

$$R_G = \frac{\mathcal{E} - IR_R}{I} = \frac{\mathcal{E}}{I} - R_R = \frac{200}{6.25} - 12.8 = 19.2 \Omega$$

$$\boxed{R_G = 19.2 \Omega}$$



$$\mathcal{E} = U_R + U_G$$

$$200 = 80 + U_G$$

$$U_G = 200 - 80 = 120 \text{ V}$$

$$R_e = R_R + R_G$$