

УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ"
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА ФИЗИКА

Д-р Благоја Вељаноски

ТЕОРИСКА МЕХАНИКА

Скопје, 20014

СОДРЖИНА

1. Поим, поделба и историски развој	1
1.1. Основни поими на механиката.....	3
1.2. Историски развој на механиката.....	6
2. Елементи на кинематика	8
2.1. Определување на положбата на точка	8
2.2. Определување на траекторијата на честица.....	10
2.3. Определување на брзината и забрзување на честица.....	11
2.4. Природни компоненти на забрзувањето	16
3. Елементи на динамика	18
3.1. Изолиран и неизолиран систем.....	20
3.2. Основна равенка на динамика.....	21
3.3. Работа и ефект (моќност) на сила	21
3.4. Моменти на механички величини	22
3.5. Конзервативни сили	23
3.6. Жироскопски и дисипативни сили.....	26
3.7. Општи закони на динамика	26
3.8. Закон на кинетичка енергија	27
4. Ограничени движења	29
4.1. Врски и видови врски	29
4.2. Можни и виртуелни поместувања	31
4.3. Сили на реакција	33
5. Даламбер-Лагранжов принцип.....	36
5.1. Општи принципи на механиката	36
5.2. Принцип на виртуелна работа	38
5.3. Даламбер-Лагранжов принцип	39
5.4. Лагранжов принцип на можни поместувања	40
6. Диференцијални равенки на слободно движење.....	41
7. Равенки со множители на врски	45

8. Лагранжови равенки	48
8.1. Метод на обопштени координати	48
8.2. Лагранжови равенки	51
9. Обопштен потенцијал и Релеева дисипативна функција	56
10. Закон за запазување на енергијата	60
11. Основни поими од варијационо сметање	63
12. Хамилтонов принцип на најмало дејство	67
13. Обопштени импулси	70
14. Хамилтонови равенки	74
15. Поасоновы загради	79
16. Канонски трансформации	81
17. Хамилтон-Јакобиева равенка	84
18. Еднодимензионално движење во поле на конзервативни сили	87
19. Математичко нишало	89
19.1. Период на осцилации	93
19.2. Случај на мали осцилации	95
20. Општи особини на централно движење	96
21. Равенка на траекторија при централно движење	101
22. Кеплеров проблем	103
23. Централно движење со подвижен извор на сила	107
24. Еластичен судир на две честици	110
25. Расејување на честици	115
25.1. Ефикасен пресек на расејување	117
26. Мали осцилации	119
26.1. Стабилна рамнотежа на систем честици	119
26.2. Диференцијални равенки на мали осцилации	121
26.3. Нормални координати на систем честици	123
Литература	127

1. ПОИМ, ПОДЕЛБА И ИСТОРИСКИ РАЗВОЈ

Физиката е пред сè експериментална наука. Меѓутоа уште во работите на Њутн и другите основоположници на современата физика, при квантитативните формулирања на физичките закони, со голем успех се применувале разни математички методи.

Во последниве стотина години примената на математичките методи во физиката е толку проширена и продлабочена, што се појавила специјална нова област - дел од физиката - **теориска физика**. Пред теориската физика стојат два вида на задачи:

1) Да ги изрази физичките закони во вид на квантитативни (количински) односи и да ги воспостави (пронајде) внатрешните взаемни врски меѓу експериментално утврдените факти. Во оваа своја улога теориската физика се јавува пред математиката со барања и потреба од поставување на нови математички апарати (дефинирање на n -димензионални простори, решавање на разни диференцијални равенки, дефинирање на специјални функции итн).

2) Втората задача на теориската физика е веќе постоечките математички методи да ги примени за наоѓање на нови физички закономерности, за претскажување на нови сè уште непознати взаемни врски меѓу физичките појави. Во оваа своја улога теориската физика постигнала големи успеси како што е предвидувањето на постоењето на планетата Нептун во 19 век од страна на францускиот астроном Леверје, дефинирање на единственоста на електричните и магнетните појави и карактеризирањето на светлината како појава од електромагнетна природа од страна на Максвел, создавањето на релативистичката теорија од страна на Ајнштајн и наоѓање на врската меѓу масата и енергијата, предвидувањето на квантната теорија (чиј основоположници се Де Броли, Шредингер и Хајзенберг) за постоење на бранови својства на микрочестиците, предвидувањето на Дираковата теорија дека постои позитронот. Исто така теориската физика претставува моќно орудие во развивањето на теоријата на елементарни честици, нуклеарната

физика, космологијата и др. Притоа треба да се подвлече дека математичкиот апарат што се користи во теориската физика е мошне разнообразен. Скоро не постои математичка дисциплина која не нашла примена во разјаснувањето на физичките закони.

Според тоа теориската физика по своите методи е математичка, а по својата содржина физичка теорија.

Секој дел од физиката има своја теориска дисциплина. Така денес како посебни курсеви се учат: **теориска механика** (движење на материјални тела), **статистичка физика** (физика на ансамбли на честици чиј посебен дел е термодинамиката), **теориска електромагнетика**, **квантна механика**.

Наставата по теориска физика има три цели:

- 1) да се сфати суштината на физичките појави, нејзините основни поими и закони кои лежат во основата на физиката,
- 2) да се овладее со општите методи на теориската физика и со помош на нив да се интерпретираат посложените физички појави и
- 3) да се запознаат основите на современата теориска физика, како на современото тумачење на класичните дисциплини така и на избрано градиво и примери од посебен интерес од модерната физика.

Сите наведени цели, заедно со останатите треба да допринесат за формирање на култура од физиката кај студентите и нивно оспособување за самостојна работа.

Терминот **механика** потекнува од грчкиот збор *μηχανα* (*mechanao*) = вештачки изработува, *mehaniki* - градба на некоја машина; наука за машините т.е. уредите вештачки изработени па оттука механика - гранка од физиката која се занимава со проучување на движењето на материјалните тела како и причините поради кои настануваат промени на состојбата на телата. Притоа под движење се подразбира промена на положбата на разгледуваните тела во однос на координатен систем врзан за некое тело кое сме го земае како основно, појдовно.

Теориската механика ги разработува теориските основи, принципи и од нив ги изведува законитостите на механиката. Позната е и како класична механика (*classici* - граѓани од прва класа, подоцна дела од прва класа; класичен - кој се однесува на класиците, за пример, одличен, прворазреден)

како механика на основоположниците Галилеј и Њутн, како механика за разлика од релативистичката и квантната.

Поделбата на механиката може да се изврши врз основа на две гледишта или спрема логичката структура или спрема објектите на движење. Во првиот случај механиката се дели на две дисциплини: **кинематика** и **динамика**. Кинематиката (*kinezis* - движење) го испитува движењето на геометриските облици на тела не водејќи сметка за причините на движењата. Динамиката го проучува движењето на материјалните тела под влијание на силите како причини кои ги предизвикуваат тие движења. Специјална гранка на динамиката е статиката која го проучува мирувањето на телата.

Во вториот случај механиката може да ја поделиме на две основни дисциплини: **механика на системи** и **механика на континуум**. Механиката на системи го проучува движењето на такви материјални тела кои можат да се сметаат за систем од честици. Механиката на континуум ги испитува движењата на такви тела кои можеме апроксимативно да ги сметаме за континуирани. Во првата категорија спаѓаат тврдите тела, а во втората еластичните тела и флуидите.

Основни поими на механиката

Математичката анализа оперира само со еден основен елемент - **количина**, поим кој се прикажува со **број** и кој се провлекува низ сите егзактни науки. Геометријата воведува нов поим - **простор** кој претставува и прв основен поим на механиката, а проучувањето на движењето на геометриските облици на телата внесува нов поим - **време**. Земајќи ја предвид и причината која ги предизвикува движењата се воведува и уште еден основен поим - **материјалност**. Овие три поими претставуваат основни поими во механиката, а соодветни величини се: должина, време и маса.

Поимите простор и време во класичната механика се сфаќаат апсолутно, па во основа на механиката лежат **апсолутниот простор** и **апсолутното време**. Тоа значи дека се зема дека постои систем кој апсолутно мирува во вселената, а движењето во однос на него претставува апсолутно движење. Истовремено се зема дека постои едно единствено време за целата

вселена, т.е. време кое подеднакво тече за сите системи во вселената. Њутн вели: *"Апсолутниот простор, по својата сопствена природа и без оглед на што било надворешно, останува секогаш на себе сличен и неподвижен. Апсолутно, право и математичко време, по себе и по својата сопствена природа, тече подеднакво без оглед на што било надворешно, и со друго име се нарекува траење"*. Меѓутоа, ваквото сфаќање на просторот и времето, дури и во рамките на класичната механика, е само делумно точно. Имено, секое движење на материјата се врши во просторот и времето и овие поими не можат да се замислат без материја. Поради тоа просторот и времето мора да се сфатат како својство на материјата во пошироко значење.

Што се однесува до поимот материјалност, тој е тесно врзан за поимот **маса** на телата. Њутн сметал дека масата е мерка за количина на материјата, но ова сфаќање на поимот маса е надминат со развојот на физиката. Денешното сфаќање на овој поим се базира на инерцијата како природно својство на материјата кое се состои во тоа секое тело да пружа отпор на секоја промена на состојбата на неговото движење. Тогаш масата на телата, која е скалар, може да се смета како мерка на инерција на телата, т.е. мерка на отпорот на промена на состојбата на неговото движење. Вака сфатена масата исто така претставува едно својство на материјата.

Во основата на класичната механика лежат **Њутновите принципи** кои во концизна форма го сумираат целокупното искуство за движењата на телата во вид на основни закони и можат да се сметаат како аксиоми на механиката. Одредувајќи ги условите на движење на телата, Њутновите принципи истовремено ги одредуваат и причините кои ги предизвикуваат движењата, па претставуваат и имплицитна дефиниција на поимот **сила**.

Прв Њутнов принцип: *Секое материјално тело останува во состојба на мирување или рамномерно праволиниско движење додека под дејство на сила не биде принудено таа своја состојба да ја промени.* Овој принцип се нарекува **принцип на инерција**, и со него е даден еден дел на дефиницијата за сила.

Втор Њутнов принцип: *Промената на количината на движење е пропорционална на силата која дејствува на телото и се врши во правец на дејство на силата.* Овој принцип се нарекува **принцип на дејство на силата** и претставува **основен закон на движење**, давајќи истовремено и главен дел на

дефиницијата на силата. Со него е одредена величината **сила** како вектор и врз основа на тоа е дадена можност за мерење, односно, споредување на силите. Како додаток на својот втор принцип, Њутн го дал **правилото на паралелограм на силите**: *Ако две сили дејствуваат истовремено на тело, нивната резултанта е еднаква на дијагоналата на паралелограмот конструиран над овие сили.* Ова правило кажува дека силите се собираат како вектори и дека дејството на секоја сила е независно од дејствата на останатите сили.

Трет Њутнов принцип: *На акцијата секогаш ѝ одговара еднаква по интензитет и спротивно ориентирана реакција, или дејствата на две тела едно на друго секогаш се еднакви и спротивно насочени.* Овој принцип се нарекува **принцип на акција и реакција** и укажува на изворот на силата. Според него за секоја сила која дејствува на едно тело постои друго тело кое претставува извор на оваа сила и на кое дејствува сила со ист интензитет и правец, но со спротивна насока. Овие сили се нарекуваат **вистински сили** и за нив секогаш може да се најде тело како извор на овие сили. Системи во кои делуваат само вистински сили, т.е. во кои сите забрзувања потекнуваат од дејствата на други тела се нарекуваат **инерцијални системи**; таков еден систем е систем кој апсолутно мирува.

Меѓутоа, Њутновите принципи во својата вообичаена формулација имаат и еден логички недостаток. Имено, во нив не е раздвоена дефиницијата на поимот сила од основните закони на механиката што претставува тешкотија во разбирањето на логичката структура на механиката.

Во основите на класичната механика премолчено се содржани извесни претпоставки, кои истовремено ги даваат и границите на нејзината применливост. Така се претпоставува дека **брзините на телата се многу мали во однос на брзината на светлината**, што е еквивалентно на апсолутното сфаќање на просторот и времето како и независноста на масата на телата од нивната брзина. Од друга страна, се претпоставува дека **масите на телата се многу големи во однос на масите на микрообјектите**, што има за последица дека со самиот процес на мерење на положбата и брзината на телото практично не се менува неговата кинематичка состојба, па овие величини во идеализиран експеримент можат истовремено прецизно да се одредат.

Доколку првиот услов не е исполнет, соодветната дисциплина на теориската физика која ја заменува класичната механика е **релативистичката механика**. Ако пак вториот услов не е исполнет, како што е случај во атомската и нуклеарната физика, таквите појави во физиката на микросветот ги проучува **квантната механика**. Притоа овие две дисциплини ја содржат класичната механика како граничен случај.

За систем на единици се зема SI системот. Притоа сите равенки на механиката имаат иста форма во сите системи на единици, за разлика од електродинамиката каде тоа не е случај.

Историски развој на механиката

Уште во стариот век започнал развојот на статиката како гранка на механиката. Основач на статиката може да се смета **Архимед** (287-212) кој прв ги воочил основните својства на силата како статички поим и прв почнал да ги применува математичките методи за проучување на механиката. Покрај статиката и кинематиката била развиена уште во стариот век. Меѓутоа, дури **Галилеј** (1564-1642) го вовел поимот на забрзување, го довел во врска со поимот сила и на тој начин ги формулирал основните закони на динамиката кои претставуваат база за нејзин понатамошен развој.

Темелите на механиката како егзактна наука ги удрил **Њутн** (1642-1727). Во своето главно дело *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* кое е објавено 1687 година, ги формулирал основните принципи како аксиоми, од кои по дедуктивен пат ги извел останатите закони. Освен тоа, Њутн е познат и по откривањето на општиот закон на гравитација како основен закон според кој се одвиваат движењата на сите небески тела. Како математичар, го создал независно од Лајбниц инфинитезималното сметање, но и покрај големите погодности на овој метод тој не го користел во своето изложување на механиката.

По Њутн развојот на механиката продолжил со забрзано темпо. **Ојлер** (1707-1783) прв ја вовел систематската примена на математичката анализа во механиката, а ја засновал и ја развил механиката на флуиди. Работата на

понатамошниот развој на механиката на флуидите ја продолжил неговиот современик **Бернули** (1700-1782) особено познат по својата равенка, додека **Даламбер** (1717-1783) формулирал еден општ принцип како метод за решавање на динамичките проблеми, применлив и на ограничени движења. Понатамошен голем чекор во развојот на механиката направил **Лагранж** (1736-1813) кој вовел чисто аналитички метод во механиката наместо поранешните геометриски методи, заснован на т.н. обопштени координати со што станал основач на аналитичката механика. Тој ги дал општите диференцијални равенки на движење во обопштени координати кои важат при било какви ограничувања на движењата и претставуваат најмоќно орудие за решавање на проблемите од механиката. Неговата работа ја продолжил **Хамилтон** (1805-1865) кој формулирал еден општ варијационен принцип на механиката и дал еден нов метод на динамиката со кој се одредува не само положбата туку и состојбата на системот во обопштени координати. Но, посебно значење на овој метод лежи во тоа што тој може да се применува и надвор од механиката, во статистичката физика и квантната механика, каде тој претставува база за кореспонденција меѓу класичната и квантната механика.

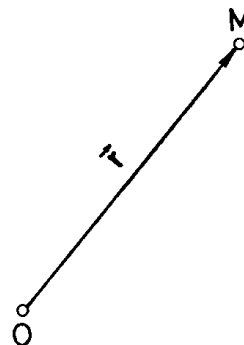
На тоа поле на науката работела цела плејада физичари и математичари, како на развој на општите принципи и поедини гранки на механиката така и на нејзини разновидни примени. Меѓу многуте да ги наведеме: Поасон, Јакоби, Поанкаре, Апел, Картон, Љапунов, Мешчерски, Циолковски и др. Најпосле, кога извесни експериментални факти дошле во расчекор со класичната механика, решавачки чекор за понатамошен развој на механиката направил **Ајнштајн** (1879-1955) творец на теоријата на релативност. Тој, отфрлајќи ги поимите на апсолутен простор и време, во 1905 ја засновал својата теорија на два принципи: принципот на еквивалентност на сите инерцијални системи и принципот на константност на брзината на светлината во такви системи, со што од основа ги изменил погледите на низа поими од механиката, но така што класичната механика сепак претставува граничен случај на оваа теорија.

2. ЕЛЕМЕНТИ НА КИНЕМАТИКА

2.1. Определување на положбата на точка

Положбата на точката во просторот може да се определи на повеќе начини.

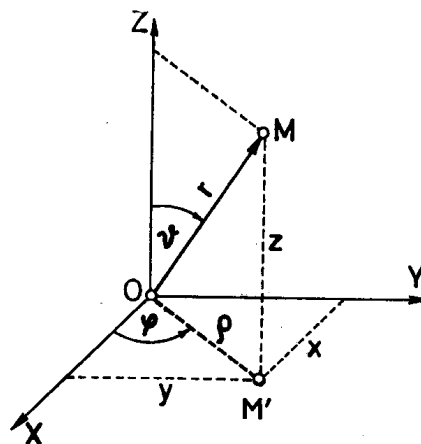
1) **векторски начин:** Се состои во повлекување на вектор чиј почеток е во една постојана точка од просторот O , а крајот во точка M чија положба се определува. Овој вектор се нарекува вектор на положбата или **радиус-вектор** и тој е определен со својот интензитет (големина, модул), правец и насока.



2) **аналитички начин:** Се засновува на методот на координати. Под **координати** на точка подразбираме севкупност, множество, збир на три величини кои потполно ја определуваат положбата на оваа точка. Во зависност од изборот на овие три величини разликуваме повеќе координатни системи.

Најпознати се следниве три: **Декартов правоаголен, цилиндричен и сферен координатен систем.**

Во правоаголниот систем положбата на M се определува со растојанијата (x, y, z) од трите взаемно нормални рамнини (координатни рамнини). Во цилиндричниот со (ρ, φ, z) , а во сферниот со (r, ϑ, φ) .



Врската меѓу правоаголниот и останатите два е:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

и

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\
 y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\
 z &= r \cos \vartheta \\
 r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 \vartheta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\
 \varphi &= \arctg \frac{y}{x}
 \end{aligned}$$

Покрај овие три координатни системи постојат и други, па општо земено може да се рече дека положбата на точката е определена со три карактеристични величини (координати) q_1, q_2, q_3 кои се нарекуваат **обопштени (генерализирани, генералисани) координати**. Меѓу овие координати и правоаголните постојат врски

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad y = y(q_1, q_2, q_3) \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

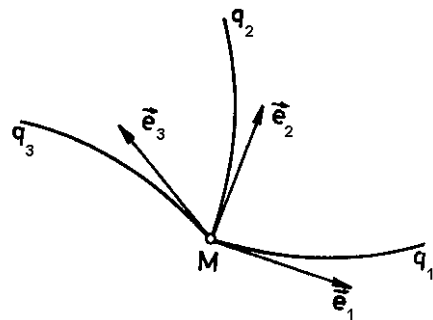
и обратно

$$q_1 = q_1(x, y, z) \quad q_2 = q_2(x, y, z) \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

Ако една од q_i се држи константна, а останатите две се менуваат, имаме равенки на координатни површини

$$q_1(x, y, z) = C_1 \quad q_2(x, y, z) = C_2 \quad q_3(x, y, z) = C_3$$

Пресеците на две од овие координатни површини даваат координатна линија. Низ секоја точка од просторот можат да се повлечат по три вакви координатни линии. Тангентите повлечени од разгледуваната точка на трите координатни линии претставуваат координатни оски. Ги усмеруваме (насочуваме) овие оски во насока на растењето на координатните q_i со поставување на единичните вектори $\vec{e}_i$. Ако $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ се взаемно нормални, системот е **ортогонален**, а ако не се, системот е **локсогонален**. Главно ќе работиме со ортогонални системи.



Радиус-векторот $\vec{r}$ може да го разложиме на три компоненти во насока на координатни оски. Ако се работи за правоаголен координатен систем имаме

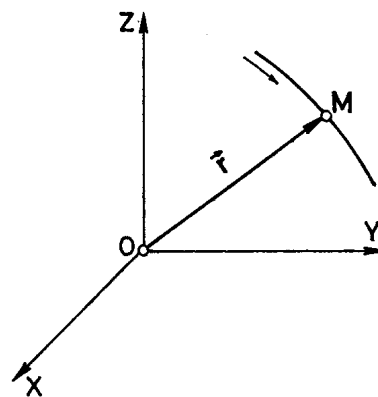
$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \quad \text{односно} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

или општо земено $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$ односно $\vec{r} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3$.

2.2 Определување на траекторијата (патеката) на честица

За да се упрости разгледувањето на движењата на телата и другите природни појави и истакнат оние важни карактеристики кои нас под дадени услови не интересираат, често се зема упростен механички модел на разгледуваната појава. Таков еден модел во динамиката претставува **материјална точка**, која може да се воведе на следниот начин.

Да воочиме некое тело чии димензии се многу мали во однос на димензиите на областа во која се врши разгледуваното движење и чие внатрешно движење не е интересно. Таквото тело ќе го наречеме **честица**. На пример планетите на Сончевиот систем, под услов да ја занемариме нивната ротација, ни даваат пример на тела кои може да ги сместиме за честици. Притоа, која била геометриска точка во внатрешноста на честицата може да послужи како претставник на нејзиното движење и ако уште ја замислиме целокупната маса на честицата концентрирана во оваа геометриска точка, така замислената геометриска точка со целокупната маса на честицата се нарекува **материјална точка**. Вака воведената материјална точка претставува соодветен механички модел на движење и во иднина под движење на честица секогаш ќе подразбираме движење на соодветна материјална точка во наведената смисла.



Движењето на една честица е потполно определено ако го знаеме менувањето на $\vec{r}$ во текот на времето $\vec{r} = \vec{r}(t)$, односно ако ги знаеме трите скаларни равенки:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

или

$$\rho = \rho(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad z = z(t)$$

или

$$r = r(t) \quad \vartheta = \vartheta(t) \quad \varphi = \varphi(t)$$

Овие равенки кои го одредуваат радиус-векторот, односно координатите на честицата како функција од времето се нарекуваат **конечни равенки на движење**.

Геометриското место на точки што ги опишува врвот на радиус-векторот ја определува **траекторијата (патекаата)** по која се врши движењето.

Движењето може да се определи и на друг начин: ако го знаеме геометрискиот облик на поминатиот пат $f(x, y, z) = 0$ и поминатиот пат



$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

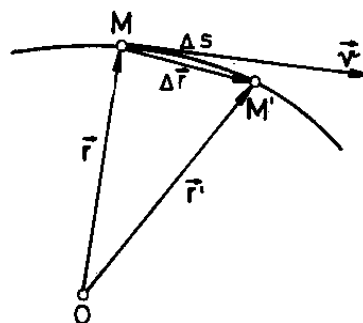
Оваа равенка се нарекува **закон на патот**.

2.3. Определување на брзината и забрзувањето на честица (во обопштени координати)

Брзината на честица во точката M ја дефинираме како гранична вредност на количникот

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

Во граничен случај $|d\vec{r}| = ds$, па интензитетот на брзината е



$$v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

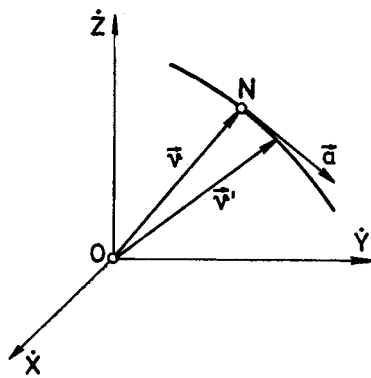
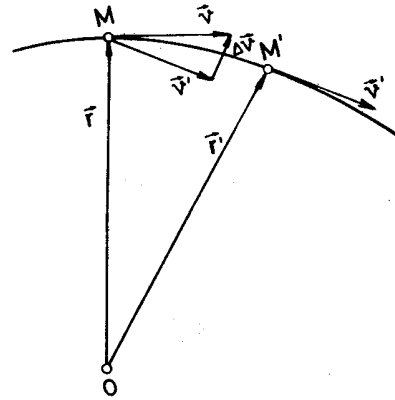
При ваква дефиниција векторот на брзината ја има насоката на тангентата во точката M

$$\vec{v} = v \vec{\tau}_0$$

Забрзувањето пак го дефинираме како гранична вредност на количникот од промената на брзината и интервалот во кој се врши таа промена.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}) = \ddot{\vec{r}}$$

Ако брзината во разни моменти транслаторно ја пренесеме во заеднички почеток, тогаш крајот на векторот ќе опишува извесна крива во просторот.



Оваа крива се нарекува **одограф на брзината**. Бидејќи брзината овде игра улога на вектор на положба, забрзувањето на честица претставува брзина на соодветната точка на одографот на брзината.

Компонентите на брзината во правоаголни координати ги добивме со диференцирање на радиус-векторот

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

па имаме

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

а на забрзувањето

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

односно

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z}$$

Компонентите на брзината и забрзувањето во обопштени координати ги добиваме на следниот начин.

Проекцијата на даден вектор врз соодветна оска можеме да ја најдеме преку дефиницијата за скаларен производ

$$v_i = v \cos \langle \vec{v}, \vec{e}_i \rangle = \vec{v} \cdot \vec{e}_i \quad (1)$$

Од друга страна

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$$

Било кој од изводите $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ го дефинираме на следниот начин

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{q_1} \vec{r}}{\Delta q_1}$$

Кога $\Delta q_1 \rightarrow 0$, $\Delta_{q_1} \vec{r}$ тежи да го заземе правецот на тангентата во насока на промената на q_1 која е ориентирана со единичниот вектор $\vec{e}_1$. Според тоа и количникот

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| \vec{e}_1 = h_1 \vec{e}_1$$

каде h_1, h_2, h_3 – се Ламеови коефициенти, односно фактори на скалата. Тие се интензитети на парцијалните изводи на радиус-векторот по обопштени координати

$$\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|} = \vec{e}_i$$

односно

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \vec{e}_i = h_i \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

каде

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

бидејќи

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

а

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad y = y(q_1, q_2, q_3) \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

додека за единичните вектори $\vec{e}_i$ добиваме

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (2)$$

Ако (2) го замениме во (1), за проекциите на брзината врз соодветните координатни оски ќе добиеме

$$v_i = \vec{v} \vec{e}_i = \vec{v} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{h_i} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Бидејќи

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

од каде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

па имаме

$$v_i = \frac{1}{h_i} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

или пократко

$$v_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

каде е воведена ознака $T^* = \frac{1}{2} v^2$ која претставува кинетичка енергија на единична маса.

За секој обопштен координатен систем може да се најде соодветна метричка форма која го одредува квадратот на елементот на лакот. Тоа се постигнува со трансформација на изразот $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ во обопштени координати и така се добива

$$\begin{aligned} ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_j \\ &= \sum_i h_i \vec{e}_i dq_i \cdot \sum_j h_j \vec{e}_j dq_j = \sum_i \sum_j h_i h_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dq_i dq_j \end{aligned}$$

Ако системот е ортогонален, што е најчест случај, т.е. $\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

имаме

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 dq_i^2$$

Со оглед дека $v = \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$, $v^2 = \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}{(dt)^2}$

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = h_1^2 \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + h_2^2 \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + h_3^2 \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2 = h_1^2 \dot{q}_1^2 + h_2^2 \dot{q}_2^2 + h_3^2 \dot{q}_3^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 \dot{q}_i^2$$

тогаш

$$T^* = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (h_1^2 \dot{q}_1^2 + h_2^2 \dot{q}_2^2 + h_3^2 \dot{q}_3^2) = \frac{1}{2} \sum_i h_i^2 \dot{q}_i^2$$

па изразот за проекциите на брзината на оските ќе биде

$$v_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_i h_i^2 \dot{q}_i^2 \right) = \frac{1}{h_i} h_i^2 \frac{1}{2} 2 \dot{q}_i = h_i \dot{q}_i$$

$$v_i = h_i \dot{q}_i$$

На сличен начин ги наоѓаме и компонентите на забрзувањето. Имено

$$a_i = a \cos < \vec{a}, \vec{e}_i > = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = \vec{a} \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

$$a_i = \frac{1}{h_i} \left(\vec{a} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{h_i} \left(\dot{\vec{v}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Сега пак од релацијата

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \dot{\vec{v}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

следува

$$\dot{\vec{v}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Бидејќи операциите на тотално диференцирање по времето и парцијално диференцирање по координати се независни, понатаму ќе имаме

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \vec{v} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \vec{v} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \vec{v} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \\ a_i &= \frac{1}{h_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \right] \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

На крај да напоменеме дека *проекциите на брзината и забрзувањето на овие оски во општ случај не се поклопуваат со нивните компоненти во правец на тие оски*. Само за ортогонални системи се поклопуваат.

2.4. Природни компоненти на забрзувањето

Ќе ги побараме компонентите на забрзувањето во насока на оските на **природниот триедар** кого го чинат тангентата, главната нормала и бинормалата.

Оскулаторна рамнина во точка M е онаа рамнина која е гранична рамнина што минува низ тангентата во таа точка и нејзе блиска точка M' која тежи кон M .

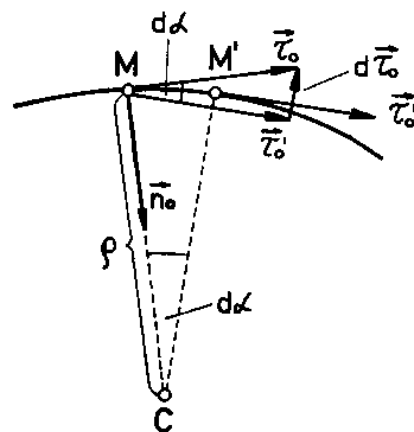
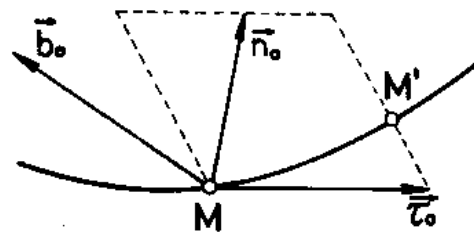
Главната нормала е онаа нормала во точката M која лежи во оскулаторната рамнина, а **бинормална** е нормала која е нормална на оскулаторната рамнина.

$$\vec{v} = v \vec{\tau}_0$$

Нека честицата во момент t се наоѓа во точка M , а во бесконечно блиско време $t+dt$ во точка M' . Во текот на бесконечно мало време dt може да сметаме дека движењето се врши во рамнина. Бидејќи оваа рамнина ја содржи тангентата и блиската точка M' , тоа е оскулаторна рамнина. Забрзувањето во точка M е

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(v \vec{\tau}_0) = \dot{v} \vec{\tau}_0 + v \dot{\vec{\tau}}_0$$

$$\dot{\vec{\tau}}_0 = \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{d\vec{\tau}_0}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}$$



Векторот $d\vec{\tau}_0$ како граничен случај на векторот $\Delta\vec{\tau}_0$ кога M' тежи кон M има правец на нормалата во точка M , а бидејќи лежи во оскулаторната рамнина, тоа е правец на главната нормала.

$$d\vec{\tau}_0 = |d\vec{\tau}_0|\vec{n}_0 = d\alpha \vec{n}_0$$

Бидејќи пресекот на двете главни нормали во точките M и M' е центар на кривина, означувајќи го со ρ радиусот на кривината ќе имаме

$$ds = MM' = \rho d\alpha$$

Тогаш

$$\dot{\vec{\tau}}_0 = v \frac{d\vec{\tau}}{ds} = v \frac{d\alpha \vec{n}_0}{\rho d\alpha} = \frac{v}{\rho} \vec{n}_0$$

па имаме

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}_0$$

Одовде гледаме дека забрзувањето може да се разложи по должина на тангентата и главната нормала, и *секогаш лежи во оскулаторната рамнина*. Компонентата по должина на тангентата се вика **тангенцијално забрзување** $a_t = \dot{v}$, а компонентата по должина на главната нормала **нормално забрзување**

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Бидејќи $\vec{\tau}_0 \perp \vec{n}_0$

$$a^2 = \dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}$$

Во случај на праволиниско движење $\rho \rightarrow \infty$ па преостанува само тангенцијалното забрзување $a = \dot{v}$, ако пак движењето се врши со константна брзина како на пример при рамномерно движење по круг $\dot{v} = 0$, па $a = \frac{v^2}{\rho}$ т.е. забрзувањето е само нормално.

Ќе разгледаме уште една величина. Нека честица се движи по крива. Притоа, површината што ќе ја опише $\vec{r}$ во интервалот $(t, t + dt)$ е

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

Опишаната површина во единица време се нарекува **секторска брзина** и таа изнесува

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

во поларни координати

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \vec{k}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\phi} \vec{k}$$

Во тесна врска со $\vec{\sigma}$ е **моментот на импулс**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} = 2m\vec{\sigma}$$

3. ЕЛЕМЕНТИ НА ДИНАМИКА

За да го воведеме поимот маса, поаѓаме од основниот постулат дека постојат инерцијални системи кои ги дефинираме со својството дека во однос на нив просторот е хомоген и изотропен, а времето хомогено. Врз основа на тоа се покажува дека во такви системи важи принципот на инерција, т.е. секое тело тежи да ја задржи состојбата на мирување, односно униформно движење. Од тоа становиште, **масата на честица** се воведува како мерка на нејзината инерција, т.е. мерка на нејзиниот отпор на секоја промена на состојбата на движење и таа величина е скалар. Да воведеме

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

импулс на честица или количина на движење.

Ако импулсот на честицата се менува со тек на времето, велиме дека постои дејство на извесна сила. Промената на импулсот на честица по единица на време може да се смета како мерка на ова дејство и се нарекува **сила**.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1)$$

Според оваа дефиниција *силата која дејствува на некоја честица е еднаква на изводот на импулсот на таа честица по времето во тој момент. Ако*

масата на честицата е константна, што одговара на класичната механика, имаме

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2)$$

па во овој случај *силата е еднаква на производот од масата на честицата на која делува оваа сила и забрзувањето на таа честица во разгледуваниот момент.*

Иако оваа дефиниција на сила е доволна за класичната механика, погорната дефиниција (1) е поопшта и важи не само за класичната туку и за релативистичката механика.

Но со оваа дефиниција на силата, ништо не е кажано за нејзината природа. Наместо да речеме дека некоја честица со маса m има во некој момент забрзување $\vec{a}$, велиме дека на таа честица дејствува сила $\vec{F} = m\vec{a}$, што е тоа исто само кажано пократко. Дури со воведување на постулатите на силата, кои се базирани на взаемното дејство на честиците во инерцијалните системи, ние на силата и даваме физичка содржина: *забрзувањето на честицата е поради взаемното дејство меѓу честиците*, кое потоа поблиску е карактеризирано со одреден закон на интеракција и основните својства на векторот на интеракција. Оттука се гледа дека навистина силата во инерцијални системи е мерка на взаемното дејство, што обично и се зема како нејзина квалитативна дефиниција.

Досега се ограничивме само на инерцијални системи кои мируваат или се движат униформно (рамномерно) и во нив ги формулиравме основните закони на дејство на силата. Меѓутоа, сите забрзувања на телата не потекнуваат од взаемното дејство меѓу телата, туку можат да имаат причина и во самото движење на системот на референција од кој се набљудува движењето. Во тој поглед сите сили како причина на забрзувањата можат да се поделат во две основни групи:

Вистински (прави) сили кои потекнуваат од взаемното дејство меѓу телата и за кои важат постулатите на силата (односно Њутновите принципи) и

Инерцијални сили кои потекнуваат од забрзувањето на системот на референција од кој се набљудува движењето и за кои не важат постулатите на силата. Во нив спаѓаат на пример центрифугалните сили.

Примери на прави сили:

1) гравитациони сили

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

2) еластични сили

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

Овие сили се само макрофизичка манифестација на истовременото взаемно дејство на разгледуваната честица со многубројните околни молекули.

3) електромагнетни сили кои се засновуваат на Лоренцовата сила

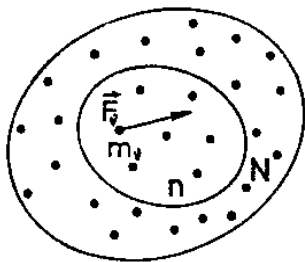
$$\vec{F} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Од гледиште на современата физика постојат само **четири типа** на взаемни дејства во природата на кои можат да се сведат сите останати: гравитациони сили, електромагнетни сили, сили на јако взаемно дејство и сили на слабо взаемно дејство.

3.1. Изолиран и неизолиран систем на честици

Систем на честици на кој не делуваат никакви надворешни прави сили се нарекува изолиран или затворен систем.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) \quad (3)$$



Силата не зависи експлицитно од времето. За неизолиран систем, т.е. систем на кој делуваат и надворешни сили, силата зависи експлицитно од времето.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) \quad (4)$$

3.2. Основна равенка на динамиката

Да ја најдеме равенката на движење на било која честица од некој систем во поле на дадени сили. Нека во момент t на i -та честица дејствува сила од облик (4), а од друга страна според дефиницијата на сила (2) имаме

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad (5)$$

Со комбинација на (4) и (5) добиваме

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) \quad (6)$$

Оваа равенка се нарекува **основна равенка на динамиката** и таа го изразува природниот закон на движење. Притоа треба да се разликуваат равенките (5) и (6), бидејќи првата ја дава дефиницијата на силата, а втората го дава природниот закон на движење добиен со комбинација на дефиницијата и постулатите на силата.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^*(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

односно

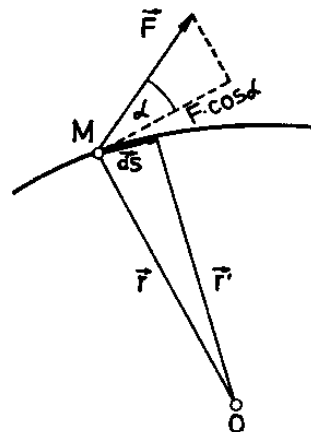
$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^*(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

се **диференцијални равенки на движење**.

Тие при преод од еден во друг инерцијален систем остануваат непроменети, т.е. се инваријантни во однос на Галилеевите трансформации.

3.3. Работа и ефект (моќност) на сила

Ако некоја сила делува на некоја честица на извесен пат, велиме дека таа врши работа. Од искуство е познато дека работата е поголема доколку е поголема силата и изминатиот пат под услов силата да е константна и да дејствува долж патот. Меѓутоа во општ случај тие услови не мора да бидат исполнети и затоа разгледуваме работа на сила на бесконечно мал пат.



Тогаш производот на активната сила и елементарното поместување може да се смета за мерка на оваа работа и се нарекува **елементарна работа** на сила $\vec{F}$ при поместување за $d\vec{r}$

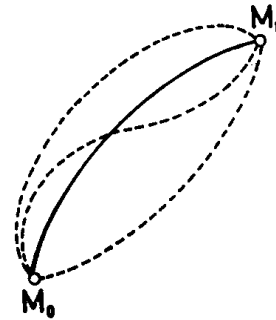
$$\delta A = d'A = F \cos \alpha \cdot dr = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

при што со знакот δ означуваме дека овој израз не мора да биде тотален диференцијал.

Вкупната работа на оваа сила на патот од M_0 до M_1 ќе биде

$$A = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} d\vec{r}$$

Оваа работа е прикажана со криволиниски интеграл и во општ случај зависи како од природата на силата $\vec{F}$ и од почетната и крајна положба, така и од обликот на патот.



Ако имаме систем од N честици тогаш

$$d'A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

а вкупната работа над системот е

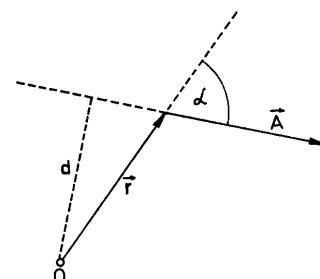
$$A = \sum_{i=1}^N \int_{M_{i0}}^{M_{i1}} \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

Работата на силата извршена во единица време се нарекува **ефект**

(моќност) на силата $\frac{d'A}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

3.4. Моменти на механички величини

Ако воочиме некоја векторска величина $\vec{A}$ и некоја точка O т.н. пол и ако со $\vec{r}$ го означиме векторот на положбата на почетната точка на векторот $\vec{A}$ во однос на полот,



векторскиот производ $\vec{r} \times \vec{A}$ се нарекува **момент на векторот** $\vec{A}$ во однос на полот О.

Како најважен случај да го наведеме **момент на сила**

$$\vec{M}^{(0)} = \vec{r} \times \vec{F}$$

а интензитетот е $M^{(0)} = r F \sin \alpha = F \cdot d$

Друг важен случај е **момент на импулс** или кинетички момент

$$\vec{L}^{(0)} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

и е во тесна врска со моментот на сила.

За разлика од првите вектори како што се брзината, силата и др. кои се нарекуваат и поларни вектори, моментот на силата и моментот на импулсот се псевдовектори (или аксијални вектори), т.е. при смена на ориентацијата на координатните оски не го менуваат знакот. Тоа е оттаму што моментите на овие величини немаат одредена природна ориентација, туку таа се одредува по договор и затоа тие се независни од координатниот систем.

3.5. Конзервативни сили

Ги разгледуваме сега основните типови сили и се прашуваме под кои услови работата на силите не зависи од обликот на патот. Подинтегралниот израз треба да биде тотален диференцијал од некоја функција на положбата на сите честици

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i = df(x_j, y_j, z_j) \quad (*)$$

при што на пример x_j претставува множество на сите апциси на честичите на системот. Тогаш

$$A = \int df = f(x_j, y_j, z_j) - f(x_{j0}, y_{j0}, z_{j0})$$

од каде гледаме дека работата зависи само од вредноста на функцијата f во почетните и крајните положби на честичите на системот. Претходниот услов (*) може да се запише како

$$\sum_{i=1}^N F_{ix} dx_i + \sum_{i=1}^N F_{iy} dy_i + \sum_{i=1}^N F_{iz} dz_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$$

Бидејќи сите координати на честиците се меѓусебно независни горната еднаквост ќе биде задоволена ако

$$F_{ix} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

Воведувајќи поим на парцијален градиент

$$\text{grad}_i f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial y_i}, \frac{\partial f}{\partial z_i} \right)$$

горните изрази можеме да ги запишеме и во векторски облик

$$\vec{F}_i = \text{grad}_i f \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

при што се употребува и ознаката

$$\text{grad}_i f = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i}$$

Значи, работата на силата не зависи од обликот на патот меѓу почетните и крајните положби на честиците ако сите сили можат да се изразат како парцијални градиенти на иста скаларна функција. Оваа скаларна функција се нарекува **функција на силата**, ваквите сили **конзервативни сили**, а системот во кој делуваат такви сили **конзервативен систем**.

Критериумот според кој може да утврдиме дали разгледуваната сила е конзервативна, можеме да го добиеме на тој начин што ќе утврдиме дали изразот (*) ги задоволува условите да биде тотален диференцијал. За случај на една честица тој критериум добива прост облик, бидејќи ако $\vec{F} = \text{grad } f$, непосредно следува

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot grad } f \equiv 0$$

што претставува потребен и доволен услов силата да биде конзервативна.

Ако $V = -f$ тогаш

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_i V \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Вака воведената величина V се нарекува **потенцијал на сили** или **потенцијална енергија на системот**.

Физичката смисла ќе ја добиеме

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i = -dV$$

$$V = -\sum_{i=1}^N \int_{M_{i0}}^{M_i} \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

и имајќи предвид дека $-\vec{F}_i d\vec{r}_i$ претставува работа против силата $\vec{F}_i$ при поместување $d\vec{r}_i$ и дека при поклопување на сите положби M_i со M_{i0} потенцијалот е еднаков на нула, можеме да кажеме: *Вредноста на потенцијалот на силите во некоја положба на системот претставува работа која треба да се изврши против сите сили за овој систем да премине од положба во која потенцијалот е нула во разгледуваната положба на системот.* Оттука гледаме зошто потенцијалот на силите се нарекува и потенцијална енергија.

Ако наместо почетни положби M_{i0} земеме некои други положби M'_{i0} тогаш

$$V' = -\sum_{i=1}^N \int_{M'_{i0}}^{M_i} \vec{F}_i d\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^N \int_{M'_{i0}}^{M_{i0}} \vec{F}_i d\vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \int_{M_{i0}}^{M_i} \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

а бидејќи првиот член е некоја константа

$$V' = V + \text{const}$$

Значи *потенцијалот на сили е определен само до адитивно константа која може да ја избереме така што потенцијалот да биде еднаков на нула во определена положба на системот.*

Во општ случај потенцијалот може да зависи и експлицитно од времето. Сите сили од облик

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_i V, \quad V = V(x_j, y_j, z_j, t)$$

се нарекуваат **потенцијални сили**, а во случај кога потенцијалот не зависи експлицитно од времето, потенцијалните сили се сведуваат на конзервативни.

Ако потенцијалот зависи експлицитно од времето и силите ќе зависат експлицитно од времето и тогаш

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^N \text{grad}_i V d\vec{r}_i = -dV + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

од каде со интеграција заклучуваме дека работата на овие сили, за разлика од конзервативните, зависи и од обликот на патот.

3.6. Жироскопски и дисипативни сили

Освен конзервативните, важна улога имаат уште два типа на сили: жироскопски и дисипативни.

Жироскопските сили се такви сили чија работа на кој било пат е еднаква на нула, што е можно ако силата зависи од брзината и секогаш е нормална на брзината. Типичен пример е Лоренцовата сила за $\vec{E} = 0$, односно

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = e(d\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} = 0$$

Дисипативните сили се такви сили чија работа на кој било пат е секогаш негативна, што одговара на трошење, расипување (дисипација) на механичка енергија. На пример, таква сила е отпорната сила на средината пропорционална на брзината на честицата и насочена спротивно од движењето.

$$\vec{F} = -k\vec{v} \quad d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -k\vec{v}d\vec{r} = -kv^2 dt$$

Во овој случај силата може да се изведе од еден потенцијал т.н. **Релеева дисипативна функција**

$$R = \frac{1}{2}k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

со помош на кој компонентите на силата се

$$F_x = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = -k\dot{x} \quad F_y = -\frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = -k\dot{y} \quad F_z = -\frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = -k\dot{z}$$

3.7. Општи закони на динамиката

Во механиката можат да се најдат извесни општи релации кои меѓусебно ги поврзуваат величините карактеристични за движење на систем на честици како што се кинетичката енергија, работата, импулсот, момент на импулсот, резултанта сила и др.

Такви општи релации кои важат без ограничувања се нарекуваат **општи закони на динамиката** и ги има три: закон на кинетичката енергија, закон на импулсот и закон на момент на импулсот. Под некои услови од овие релации можат со интеграција да се добијат **закони за запазување** на соодветните механички величини и тоа се први интегрални на движење.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \vec{v}_i$$

се нарекува кинетичка енергија на системот

$$dT = d'A \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i$$

3.8. Закон за кинетичка енергија

Од овој закон под одредени услови може да се добие како прв интеграл законот на запазување на енергијата.

Ако силите се конзервативни, т.е.

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_i V(x_j, y_j, z_j)$$

$$d'A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i = -dV$$

$$dT = -dV$$

$$T = -V + \text{const}$$

$$T + V = E = \text{const}$$

Ако сите сили кои делуваат на системот се конзервативни или жирокопски, вкупната енергија на системот, т.е. збирот на кинетичката енергија и потенцијалната енергија на конзервативните сили, е постојана во текот на времето. Овој прв интеграл претставува познатиот **закон за запазување на механичката енергија** и тој истовремено изразува и една важна особина на конзервативните сили од каде потекнува и нивното име.

Во случај на потенцијални сили кога потенцијалот зависи експлицитно од времето, законот за запазување на механичката енергија не важи. Тоа е разбирливо бидејќи и силите зависат експлицитно од времето и разгледуваниот систем не е веќе изолиран и може да разменува енергија со околината.

Ако силите не се воопшто потенцијални, не може да се зборува за поимот на потенцијална енергија, па ни овде не важи законот за запазување на механичката енергија. Таков е случајот со дисипативните сили од кои се најпознати силите на триење.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Ова може да се упрости, ако во разгледуваниот систем на честици разликуваме два вида на сили: внатрешни сили кои потекнуваат од честичите на самиот систем и надворешни сили кои потекнуваат од честичите вон разгледуваниот систем. Внатрешните сили кои дејствуваат меѓу кои било честици од системот доколку важи законот за акција и реакција, взаемно се поништуваат $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = 0.$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i\text{ex.}} \text{ - закон на импулсот}$$

$$\text{Ако } \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i\text{ex}} = 0$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const} \text{ - закон за запазување на импулсот}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\text{ex}} \text{ - закон на момент на импулсот}$$

$$\text{Ако } \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\text{ex}} = 0$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{const} \text{ - закон за запазување на моментот на импулсот.}$$

4. ОГРАНИЧЕНИ ДВИЖЕЊА

4.1. Врски и видови врски

Со оглед на природата на движењето, нив можеме да ги поделиме во две групи. Движења при кои положбите и брзините на честиците не се со ништо ограничени се нарекуваат слободни движења, а кај оние кај кои постојат извесни ограничувања во поглед на положбата и брзината на честиците се нарекуваат **ограничени (условени, принудени) движења**. Системи на честици кои не се ограничени во своето движење се нарекуваат слободни системи, а во спротивен случај неслободни (ограничени) системи.

На пример, да разгледаме ограничено движење на една честица по некоја површина која може да се поместува со тек на времето. Равенката нека биде

$$f(X, Y, Z, t) = 0$$

Координатите на честицата во секој момент мора да ја задоволуваат равенката на оваа површина, т.е. мора да е

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Врски претставуваат какви било ограничувања на положбата и брзината на честиците од системот. Тие се реализираат преку површини, осовини и други механизми, а аналитички се изразуваат со некои релации меѓу координатите и брзините на честиците и евентуално времето и се нарекуваат равенки на врски. Се делат на две групи: **холономни** и **нехолономни врски**.

Нека имаме систем од N честици и да претпоставиме дека постојат k врски меѓу координатите на честиците и времето

$$f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0$$

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0$$

или поконцизно

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Вакви врски кои ги ограничуваат само положбите на честиците се нарекуваат **холономни** или **конечни врски**, а соодветните системи **холономни системи**. Поради овие k врски, од вкупниот број координати $3N$ само $3N-k$ се независни, а останатите k се одредени со овие врски. Поради тоа бројот на овие врски не може да биде поголем од бројот на сите координати, т.е. мора $k \leq 3N$. Притоа за секој момент t имаме одреден облик на овие равенки и нивниот облик во општ случај може да се менува со тек на времето, па времето t во овие врски игра улога на параметар.

Да претпоставиме дека врските содржат и временски изводи на векторите на положбите и дека не можат со интеграција да се сведат на холономни врски и нека се ℓ на број

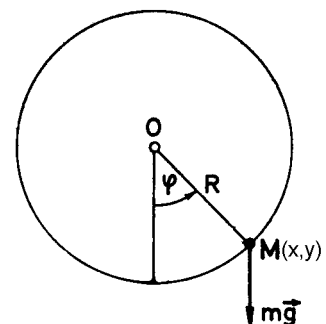
$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \ell)$$

Вакви врски кои освен положбите ги ограничуваат и брзините на честиците се нарекуваат **нехолономни** или **диференцијални врски**, а соодветните системи **нехолономни системи**.

Доколку врските не се менуваат во текот на времето, тие не содржат експлицитно време и такви врски било холономни или нехолономни се нарекуваат стационарни или склерономни врски. Врските што содржат и експлицитно време се нарекуваат нестационарни или реономни врски. Сите вакви ограничувања што се опишуваат со равенки претставуваат т.н. задржувачки врски, а во општ случај ограничувањата можат да се опишат и со неравенки.

Примери

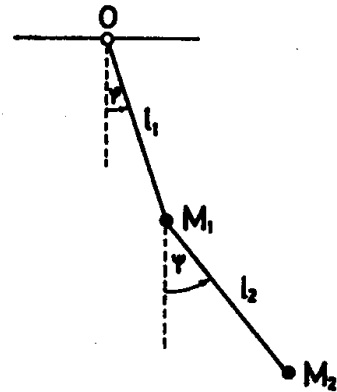
1) Во случај на движење на честица по кружница $x^2 + y^2 = R^2$, но бидејќи $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ ќе имаме еден степен на слобода или во поларни координати $r = R$ е равенка на врска, а променлива е φ .



2) Во случај на двојно рамно нишало имаме 4 координати, но со оглед дека

$$l_1 = \text{const} \quad l_2 = \text{const}$$

ќе имаме само две независни променливи φ_1 и φ_2



4.2. Можни и виртуелни поместувања

Да претпоставиме движење на еден систем со k холономни врски и да разгледаме такви елементарни поместувања на честиците на овој систем кои се во согласност со овие ограничувања. Такви елементарни поместувања кои се вршат во ист бесконечно мал временски интервал се нарекуваат **МОЖНИ поместувања**. Сите не мора да се совпаѓаат со вистинските поместувања, меѓутоа секое вистинско поместување сигурно е и можно. Нека се

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt \quad d'\vec{r}_i = \vec{v}'_i dt$$

две можни поместувања на i -та честица во ист временски интервал $(t, t + dt)$. Нивната разлика

$$\delta\vec{r}_i = d'\vec{r}_i - d\vec{r}_i$$

се нарекува **виртуелно поместување**.

Поради холономните врски ни виртуелните поместувања не се произволни, па да ги побараме условите кои тие мора да ги задоволуваат. Ако конечните равенки на движење на сите честици на системот

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \quad i = (1, 2, \dots, N)$$

ги внесеме во равенките на врски, ќе добиеме извесни функции $F_j(t)$. Бидејќи равенките на врски во секој момент мора да бидат задоволени, тогаш

$$f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N(t), t) \equiv F_j(t) \equiv 0$$

Ова важи и за $t + dt$

$$F_j(t + dt) \equiv 0$$

па

$$F_j(t+dt) - F_j(t) = dF_j(t) = 0$$

т.е. идентичностите $F_j(t) \equiv 0$ добиени со внесување на конечните равенки на движење во равенките на врски можат да се диференцираат.

Значи

$$F_j(t) \equiv f_j(x_i(t), y_i(t), z_i(t), t)$$

$$dF_j(t) \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0 \quad (*)$$

За други можни поместувања во исто dt

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j \cdot d'\vec{r}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = 0$$

па со одземање наоѓаме

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (**)$$

Тоа се бараните услови кои мора да ги задоволуваат виртуелните поместувања во случај на холономни врски и такви услови има колку и равенки на врски.

Оттука гледаме дека меѓу $3N$ компоненти на виртуелните поместувања $\delta\vec{r}_i$ постојат k врски па има само $3N-k$ независни компоненти.

Доколку врските се стационарни, сите парцијални изводи по времето се еднакви на нула па во равенките (*) отпаѓаат крајните членови

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j \cdot d\vec{r}_i = 0$$

Со споредба на овие равенки со условите (**) гледаме дека во овој случај можните поместувања $d\vec{r}_i$ ги задоволуваат истите услови како и виртуелните и во таа смисла може да кажеме дека можните поместувања во случај на стационарни врски се еквивалентни со виртуелните.

4.3. Сили на реакција

Ако на пример една честица се движи по некоја површина под дејство на некоја сила $\vec{F}$, честиците кои го создаваат овој механизам на врска можат на разгледуваната честица да делуваат со дополнителна сила $\vec{R}$ така што забрзувањето што го има честицата при ова ограничено движење е одредено со вкупната сила $\vec{F} + \vec{R}$

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

Оваа дополнителна сила $\vec{R}$ се вика **сила на реакција**, за разлика од неа силата $\vec{F}$ се нарекува **активна сила**, а вкупната сила $\vec{F} + \vec{R}$ **ефективна сила**.

Во општ случај, при движење на разгледуваниот систем на секоја честица делува и извесна сила на реакција, така што ќе имаме

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

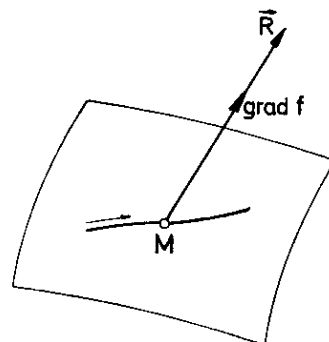
На тој начин со воведување на поимот реакција, ограниченото движење е сведено на слободно па може да кажеме: *Ограниченото движење на систем честици под влијание на активни сили исто е како слободно движење на овој систем под влијание на ефективни сили, т.е. активни сили и сили на реакција.*

Силите на реакција кај холономните и задржувачки врски можат да се поделат во две групи. За таа цел да разгледаме движење на честица по површина $f(x, y, z, t) = 0$ и нека силата на реакција со која оваа површина делува на неа е нормална на површината.

Имајќи предвид дека $\text{grad } f$ секогаш има правец на нормалата на соодветната еквиסקаларна површина, оваа сила на реакција е колинеарна со $\text{grad } f$

$$\vec{R} = \lambda \text{grad } f$$

Во општ случај, ако имаме k холономни врски, секоја врска може да даде сила на реакција $\vec{R}_i$ на i -та честица, која има две компоненти - една во правец на $\text{grad}_i f_j$, а втора во правец нормален на $\text{grad}_i f_j$.



Идеални реакции се такви сили на реакција кои се линеарна комбинација на парцијалните градиенти

$$\vec{R}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j$$

со исти коефициенти $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ за сите честици, кои се нарекуваат множители на врски. Врските кои произведуваат такви сили на реакција се нарекуваат **идеални врски**. Силите на реакција кои не го задоволуваат наведениот услов се нарекуваат неидеални реакции, а соодветните врски неидеални врски.

Да ја побараме елементарната работа на идеалните реакции над можните и виртуелните поместувања на честиците на системот.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{R}_i d\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j \right) d\vec{r}_i = \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j d\vec{r}_i \right) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \left(- \frac{\partial f_j}{\partial t} dt \right) \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i d\vec{r}_i = - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} dt$$

Елементарната работа над другите можни поместувања $d'\vec{r}_i$ за исто време dt

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i d'\vec{r}_i = - \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial t} dt$$

Со одземање добивме

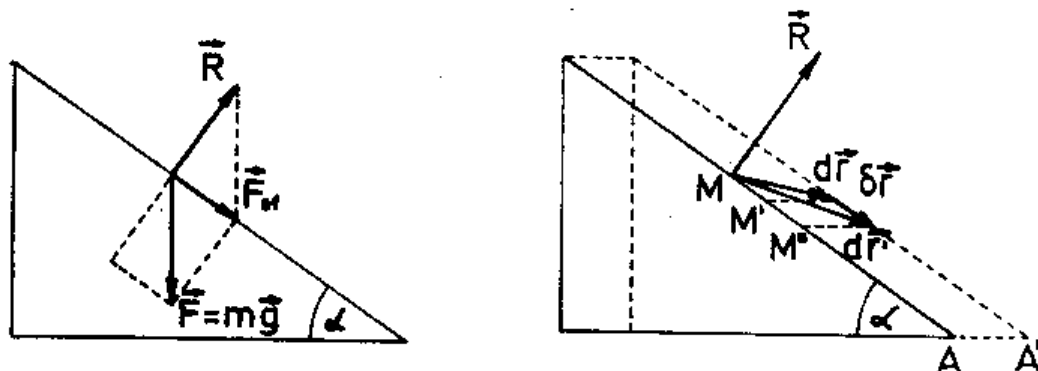
$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i d\vec{r}_i = 0$$

Значи, *вкупната елементарна работа на сите идеални реакции над било кои виртуелни поместувања на честиците на системот секогаш е еднаква на нула.*

Примери

1) Разгледуваме движење на честица низ наведена рамнина. Покрај активната сила $\vec{F} = m\vec{g}$ на честица делува уште една додатна сила, сила на

реакција $\vec{R}$ која настанува како реакција на нормалната компонента на силата $\vec{F}$ и со која наведената рамнина делува на разгледуваната честица.



Оваа реакција е нормална на наведената рамнина па според дефиницијата е идеална реакција. Таа не предизвикува никакво движење, а нејзиниот збир со активната сила ја дава ефективната сила $\vec{F}_{ef}$ која делува низ наведената рамнина. Ако оваа наведена рамнина се движи, да воочиме две можни поместувања низ наведената рамнина MM' и MM'' . Нека за тоа време наведената рамнина се помести за AA' , тогаш соодветните можни поместувања во однос на системот кој мирува ќе бидат $d\vec{r}$ и $d\vec{r}'$. Нивната разлика претставува виртуелно поместување $\delta\vec{r}$ и тоа е паралелно на наведената рамнина, па е нормално на силата на реакција. Меѓутоа, можните поместувања $d\vec{r}$ и $d\vec{r}'$ не се веќе нормални на силата на реакција, па во овој случај само работата на силата на реакција над виртуелното поместување е еднаква на нула

$$\vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0, \quad \vec{R} d\vec{r} \neq 0$$

2) Силата на триење е типичен пример на неидеални реакции. При движење на честица по рапава површина, најдено е дека силата на триење е пропорционално на брзината на честицата и нормалната компонента на идеалната реакција, има правец на брзината, а насочена е спротивно од движењето на честицата

$$\vec{R}_{tr} = -k |\vec{R}_n| \frac{\vec{v}}{v}$$

каде k е т.н. коефициент на триење. Таа не е од обликот според дефиницијата, а нејзината работа е очигледно различна од нула, како над можните така и над виртуелните поместувања и по правило се претвора во топлотна енергија.

Во случај на ограничени движења можат да се прошират порано формулираните општи закони на динамиката имајќи предвид дека овде имаме сега ефективни сили $\vec{F}_{ef} = \vec{F} + \vec{R}$. Сите поранешни изрази остануваат на снага ако под силите кои фигурираат во тие изрази подразбираме ефективни сили, а од вака формулираните општи закони на динамиката можеме да ги најдеме и соодветните закони на запазување.

Така законот на кинетичка енергија за ограничено движење ќе гласи

$$dT = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i d\vec{r}_i$$

За да може да се интегрира, треба не само првиот член туку и вториот член да биде тотален диференцијал или нула. Тоа е случај ако реакциите се идеални и сите парцијални изводи $\partial f_i / \partial t$ се нула. Тогаш

$$T + U \equiv E = const$$

Ако сите активни сили се конзервативни или жироскопски, силите на реакција идеални, а врските стационарни, вкупната енергија се запазува.

5. ДАЛАМБЕР - ЛАГРАНЖОВ ПРИНЦИП

5.1. Општи принципи на механиката

Во досегашното разгледување појдовна основа ни беа постулатите на силата, односно еквивалентните Њутнови принципи, како и дополнителните услови за врските и силите на реакција. Поаѓајќи од нив формулиравме диференцијални равенки на движење со кои во принцип може да се реши секој механички проблем.

Меѓутоа, постои и друг начин за добивање на овие равенки. Така поаѓајќи од општата равенка на динамиката за ограничени движења

$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$ и претпоставката за природата на активните сили како и врските и силите на реакција, може да се дојде до извесни општи ставови. Тие обично се формулираат во вид на услови кои мора да ги задоволува некој одреден аналитички израз. Ако сега таков општ став се постулира како основен појдовен став, од него можат да се добијат соодветните диференцијални равенки на движење за разгледуваната класа на системи. Така дефинираните општи ставови се нарекуваат **општи принципи на механиката**.

Според математичката формулација, т.е. според природата на математичкиот израз со помош на кој се формулираат, овие принципи можат да се поделат на диференцијални и интегрални.

Диференцијалните принципи се карактеризираат со тоа што соодветниот аналитички израз има диференцијален облик и тие се однесуваат само на елементарните поместувања на системот. Тука спаѓаат Даламбер - Лагранжовиот, Лагранжовиот принцип на можни поместувања, Гаусов, Херцов, Апелов и други.

Интегралните принципи се формулираат со некој аналитички израз во форма на интеграл и тие се однесуваат на конечните поместувања на системот од неговата почетна положба во конечен интервал на време. Тие се помалку општи од диференцијалните, но некои од нив можат да се прошират и вон механиката во таа смисла што и во тие области може да се најде некој интегрален израз кој го задоволува истиот услов. Тука спаѓаат Хамилтоновиот, Мапериус-Лагранжовиот, Ојлеровиот принцип на најмало дејство, Јакобиевиот, Хелмхолцовиот и др.

Смислата на овие принципи е следната. Тие пред сè изразуваат извесни општи природни закони на движење кои обединуваат во себе разни спацијални случаи: слободно движење, движење со потенцијални сили, движење со холономни или нехолономни врски. Освен тоа тие претставуваат орудие со помош на кое можат да се добијат разни облици на диференцијални равенки на движење, на пример од Даламбер-Лагранжовиот принцип можат да се изведат равенките на движење со линеарни нехолономни врски или општите равенки на движење во т.н. обопштени координати. Исто така, некои принципи имаат пошироко значење отколку само во механиката, како на пример Хамилтоновиот принцип кој може да се генерализира така што да биде

применлив во сите области на теориската физика, од механиката на континуум до квантната теорија на поле.

5.2. Принцип на виртуелна работа

Ако еден систем е во рамнотежа тогаш вкупната сила што дејствува врз секоја негова честица е нула

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

па работата над виртуелните поместувања исто така ќе биде нула

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Но $\vec{F}_i = \vec{F}_{i(a)} + \vec{R}_i$ па имаме

$$\sum_i \vec{F}_{i(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Ние ќе се ограничине понатаму на такви системи во кои силите на реакција се идеални, т.е.

$$\sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Според тоа, ако се ограничине на систем во рамнотежа без врски или со идеални врски, т.е. такви кои даваат идеални реакции, вкупната работа на активните сили извршена над било какви виртуелни поместувања е нула, т.е.

$$\sum_i \vec{F}_{i(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Ова е познато како **принцип на виртуелна работа**.

Овде коефициентите пред $\delta \vec{r}_i$ не се рамни на нула и $\delta \vec{r}_i$ не се независни туку се поврзани со $\sum_i \text{grad} f_j \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. За да се изедначат коефициентите на нула треба погоре да фигурираат не $\delta \vec{r}_i$, туку виртуелните поместувања од независни координати q_i .

5.3. Даламбер-Лагранжов принцип

Принципот на виртуелна работа важи само за системи во рамнотежа. Да видиме каков ќе биде принципот за системи во движење.

Да разгледаме ограничено движење на честица под дејство на активна сила $\vec{F}_{i(a)}$. Основната равенка е

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{i(a)} + \vec{R}_i$$

или

$$\vec{F}_{i(a)} + \vec{R}_i + (-m_i \vec{a}_i) = 0$$

Оваа равенка може да се интерпретира и како услов за рамнотежа меѓу активната сила $\vec{F}_{i(a)}$, силата на реакција $\vec{R}_i$ и извесна сила $-m_i \vec{a}_i$. За оваа последна сила $-m_i \vec{a}_i$ не може да се наведе причината да биде во заемнодејство со некое тело и затоа таа се нарекува фиктивна сила на инерција. Значи може да кажеме: *Ограниченото движење на некоја честица под дејство на извесна активна сила може да се интерпретира и како мирување на таа честица при рамнотежа на активната сила, силата на реакција и фиктивната сила на инерција.*

За систем од N честици принципот на виртуелна работа ќе гласи

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_{i(a)} - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

бидејќи зедовме дека ќе разгледуваме системи со идеални реакции за кои $\sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$.

Ова може да се формулира на следниов начин: *Секое вистинско движење на систем од честици без врски или со идеални врски, се врши така што вкупната работа на сите активни сили и фиктивни сили на инерција над било кои виртуелни поместувања на честиците од системот е рамна на нула.*

Овој општ став кој е добиен од основната равенка на движење во случај на идеални врски се нарекува **Даламбер-Лагранжов принцип**. Со него се овозможува методите на решавање на статички задачи да се применат на динамички задачи. Тој е формулиран во облик на услови кои мора да ги

задоволува аналитичкиот израз на левата страна, кој е од диференцијален облик и затоа овој принцип е општ диференцијален принцип на механиката.

5.4. Лагранжов принцип на можни поместувања

Во случај на статичка рамнотежа на систем честици Даламбер-Лагранжовиот принцип се упростува. Така, поради мирување на системот

$$\vec{v}_i = 0 \quad \vec{a}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и поради земање на стационарни врски, т.е. во тој случај врските не зависат експлицитно од времето односно за такви случаи виртуелните поместувања се еквивалентни на можните, т.е. $\delta \vec{r}_i = d\vec{r}_i$. Тогаш ќе имаме

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$$

Ако системот од честици е во рамнотежа, вкупната работа на сите активни сили над било какви можни поместувања на системот е еднаква на нула. Ова е **Лагранжов принцип на можни поместувања** кој игра голема улога во статиката.

Пример: рамнотежа на лост

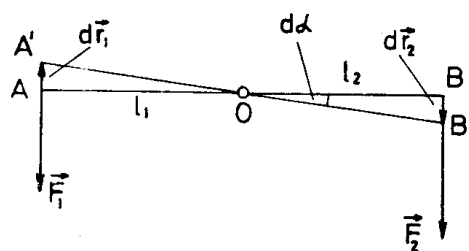
Да земеме лост на кој делуваат две сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ кои тежат да му дадат завртувања околу утврдена точка во спротивни насоки. Од положба AB нека лостот се нашол во положба $A'B'$. Тогаш од Лагранжовиот принцип имаме

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = 0$$

Бидејќи векторите $\vec{F}_2$ и $d\vec{r}_2$ се со спротивна насока, а $\vec{F}_1$ и $d\vec{r}_1$ со иста имаме

$$F_1 dr_1 - F_2 dr_2 = 0$$

$$dr_1 = l_1 d\alpha \quad dr_2 = l_2 d\alpha$$



ОДНОСНО

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

ИЛИ

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

а тоа е познатиот услов за **рамнотежа на лост**. Лагранжовиот принцип бил познат уште во времето на Галилеј како **"златно правило" на механиката** - *"добиеното во силата се компензира со изгубеното на поместувањето, и обратно"*.

6. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ НА СЛОБОДНО ДВИЖЕЊЕ

Да разгледаме слободно движење на систем од N честици на кој ќе го примениме Даламбер-Лагранжовиот принцип

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

За слободно движење сите виртуелни поместувања се независни помеѓу себе, па за горниот израз да биде еднаков на нула за кои било $\delta \vec{r}_i$, сите коефициенти пред нив мора да се нула

$$\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i = 0$$

ИЛИ

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

или експлицитно

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$$

$$m_N \ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$$

Ова се **диференцијални равенки на движење** на разгледуваниот систем и тие се поклопуваат со диференцијалните равенки добиени од вториот Њутнов закон. Тие претставуваат систем од N симултани обични

диференцијални равенки од втор ред во кои непознати функции се радиус-векторите $\vec{r}_i$, а независна променлива времето t .

Соодветните скаларни равенки во Декартови координати ќе ги добиеме со скаларно множење на векторските равенки со единичните вектори на координатните оски $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

За слободно движење на една честица диференцијалната равенка е

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Меѓутоа, во овој случај освен равенките

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

можат да се користат и други облици на скаларни диференцијални равенки.

Така во обопштен координатен систем

$$m \frac{1}{h_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \right) = \vec{F} \cdot \vec{e}_i = F \cos < \vec{F}, \vec{e}_i > \quad i = 1, 2, 3$$

или воведувајќи

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = m T^*$$

ќе имаме

$$\frac{1}{h_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = F \cos < \vec{F}, \vec{e}_i > \quad i = 1, 2, 3$$

Тоа се **диференцијални равенки на движење на честица во обопштени координати.**

Ако пак векторската равенка ја помножиме со единичните вектори на оските од природниот триедер $\vec{\tau}_o, \vec{n}_o$ и $\vec{b}_o$ на кривата која претставува траекторија на честицата ќе имаме

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos < \vec{F}, \vec{\tau}_o >$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = F \cos < \vec{F}, \vec{n}_o >$$

$$0 = F \cos < \vec{F}, \vec{b} >$$

Тоа се т.н. **природни диференцијални равенки на движење на честица**.

Да покажеме како со решавање на диференцијални равенки на движење можат да се најдат нивните интегрални равенки на движење. Да појдеме од равенките во скаларен облик и да претпоставиме дека ги знаеме сите сили $\vec{F}_i$ кои делуваат на честичите од системот, а исто така и почетните положби и брзини на сите честичи $\vec{r}_{i0}$ и $\vec{v}_{i0}$, при што вредностите на овие величини се нарекуваат почетни услови. Основен проблем на динамиката се состои во следното: *ако ги знаеме сите сили кои делуваат на системот и почетните услови на системот, да се определи неговото понатамошно движење*.

Бидејќи претпоставивме дека ги знаеме сите сили, десните страни на горните равенки претставуваат познати функции од наведените променливи. Тогаш овие равенки претставуваат систем од $3N$ симултани обични диференцијални равенки од втор ред во кои непознати функции се координатите на честичите x_i, y_i и z_i , а независно променлива е времето t . Бидејќи интегралот на диференцијални равенки од втор ред содржи две интеграциони константи, интегралите на горниот систем ќе содржат $6N$ интеграциони константи, т.е.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= f_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \\ y_i &= \phi_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \\ z_i &= \psi_i(t, C_1, \dots, C_{6N}) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Со диференцирање на овие интегрални равенки по времето ќе добиеме

$$\dot{x}_i = \dot{f}_i(t, C_1, \dots, C_{6N})$$

$$\dot{y}_i = \dot{\phi}_i(t, C_1, \dots, C_{6N})$$

$$\dot{z}_i = \dot{\psi}_i(t, C_1, \dots, C_{6N})$$

па во горните и овие изрази ги внесеме почетните услови, па така за $t = t_0$

$$\begin{aligned}
x_{io} &= f_i(t_o, C_1, \dots, C_{6N}) \\
y_{io} &= \varphi_i(t_o, C_1, \dots, C_{6N}) \\
z_{io} &= \psi_i(t_o, C_1, \dots, C_{6N}) & (i = 1, 2, \dots, N) \\
\dot{x}_{io} &= \dot{f}_i(t_o, C_1, \dots, C_{6N}) \\
\dot{y}_{io} &= \dot{\varphi}_i(t_o, C_1, \dots, C_{6N}) \\
\dot{z}_{io} &= \dot{\psi}_i(t_o, C_1, \dots, C_{6N})
\end{aligned}$$

Во овие равенки непознати се само интеграционите константи $C_1, \dots, C_{6N}$. Вакви равенки има $6N$, колку и интеграциони константи, па со алгебарско решавање на овој систем добиваме

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_1(t_o, x_{io}, y_{io}, z_{io}, \dot{x}_{io}, \dot{y}_{io}, \dot{z}_{io}) \\
&\text{-----} \\
C_{6N} &= C_{6N}(t_o, x_{io}, y_{io}, z_{io}, \dot{x}_{io}, \dot{y}_{io}, \dot{z}_{io})
\end{aligned}$$

Со внесување на овие вредности во горните изрази добиваме

$$\begin{aligned}
x_i &= x_i(t) \\
y_i &= y_i(t) & (i = 1, 2, \dots, N) \\
z_i &= z_i(t)
\end{aligned}$$

Овие равенки претставуваат **конечни равенки на движење** на разгледуваниот систем во правоаголни координати, со што проблемот е решен.

Механички принцип на каузалноста

Гледаме дека ако ги знаеме сите сили кои дејствуваат на честиците од системот и почетните услови, т.е. почетните положби и брзини на сите честици, кои ја одредуваат кинематичката состојба на системот во тој момент, можат да се најдат конечните равенки на системот. Во математичката анализа се покажува дека доколку даден систем на обични диференцијални равенки експлицитно да се реши по изводите од највисок ред во облик на еднозначни функции, тогаш и решенијата на тој систем под доста широки општи услови се еднозначни за секое множество почетни услови за кои овој систем е дефиниран. Бидејќи горниот систем диференцијални равенки е експлицитно и

еднозначно решен по изводите од највисок ред (од втор ред), неговите решенија ќе бидат еднозначни при било кои почетни услови. Значи, диференцијални равенки на движење потполно и еднозначно ги одредуваат положбите и брзините на сите честици на разгледуваниот систем во кој било друг момент, поранешен или подоцнешен под услов во целиот разгледуван интервал на време да делуваат исти сили. Притоа во класичната механика премолчено претпоставуваме дека во идеализиран експеримент секогаш можеме истовремено прецизно да ги одредиме положбата и брзината на секоја честичка, што престанува да важи во микросветот. Така можеме да кажеме: *Силите кои делуваат на системот и кинематичката состојба на системот во било кој момент потполно еднозначно го одредуваат движењето на овој систем како во минатото така и во иднината.*

Овој став е познат под името **механички принцип на каузалност (причиноста)** и на него се заснова **механичкиот детерминизам**. Таквото сфаќање на каузалноста кое се заснова на причинската поврзаност на сите појави во природата врз основа на законите на класичната механика, овозможило на пример не само точно одредување на положбата на секое тело од Сончевиот систем во кој било момент, туку и пронаоѓање на нови планети (на пример Нептун и Плутон).

7. РАВЕНКИ СО МНОЖИТЕЛИ НА ВРСКИ

Да разгледаме систем од N честици кој се движи ограничено и да го примениме Даламбер-Лагранжовиот принцип

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1)$$

Нека има k холономни врски

$$f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2)$$

и тогаш сите виртуелни поместувања не се веќе произволни, туку мора да ги задоволуваат условите

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (3)$$

кои ги има колку и равенките на врски. Поради тоа од $3N$ компоненти на виртуелните поместувања δx_i , δy_i и δz_i има само $3N-k$ независни, а останатите се зависни од нив. Тогаш во Даламбер-Лагранжовиот принцип (1) не може да ги изедначиме сите коефициенти пред $\delta \vec{r}_i$ со нула, бидејќи тоа е можно само во случај кога сите компоненти на виртуелните поместувања се меѓусебно независни.

За да се ослободиме од зависните компоненти, го множиме секој услов (3) со еден неодреден множител и линеарните комбинации на така добиените равенки ги собираме со равенката (1). Овие неодредени множители се нарекуваат **множители на врски** кои ги има колку и равенки на врски, односно зависни компоненти. Овие множители на врски ги избираме така што сите коефициенти пред зависните компоненти да бидат еднакви на нула со што се ослободуваме од зависните компоненти и така овој проблем го сведуваме на проблем на слободно движење.

Така, секој услов (3) го множиме со неодреден множител λ_j и ги собираме така добиените равенки

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_j \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4)$$

Ако го промениме редот на сумирање во оваа равенка и ја собереме со (1)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j \right) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (5)$$

или скаларно

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left(F_{i\alpha} - m_i a_{i\alpha} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{i\alpha}} \right) \delta x_{i\alpha} = 0 \quad (6)$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^N \left[\left(F_{ix} - m_i a_{ix} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \left(F_{iy} - m_i a_{iy} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \left(F_{iz} - m_i a_{iz} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right) \delta z_i \right] = 0$$

Оваа сума ја раздвојуваме на збир од сумата на првите $3N-k$ членови со независни компоненти $\delta x'_{i\alpha}$ и сумата од преостанатите k членови со зависни компоненти $\delta x''_{i\alpha}$. Да ги избереме сега k неодредените множители λ_j така што сите коефициенти пред k зависните компоненти на виртуелните поместувања бидат еднакви на нула, со што отпаѓаат последните k членови на левата страна на равенката (6). Тогаш преостануваат само членовите со независни компоненти на виртуелните поместувања, а за тие да бидат нула, односно преостанатиот израз биде нула за било кој вредности на овие независни компоненти $\delta x'_{i\alpha}$, сите коефициенти пред нив мора да бидат нула. Така заклучуваме дека при таков избор на множителите λ_j сите коефициенти во (6) се еднакви на нула, па и сите коефициенти во (5) се еднакви на нула

$$\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

или

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

Ова се нарекуваат **равенки со множители на врски** или **Лагранжови равенки од прв вид**.

Соодветни скаларни равенки се

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

Тоа се **диференцијални равенки на ограничено движење со идеални и холономни врски**.

Ако ја споредиме равенката (7) со основната равенка за ограничено движење

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$

гледаме дека

$$\vec{R}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{grad}_i f_j$$

со што поаѓајќи од Даламбер-Лагранжовиот принцип го добивме обликот на идеални реакции во случај на идеални холономни и задржувачки врски и што се поклопува со претходната дефиниција на идеални реакции.

Движењата на систем со ограничувања е определено со системот равенки (8) и (2). Притоа мора да бидат однапред зададени активните сили $\vec{F}_i$, равенките на врски (2) и почетните услови. Тогаш наведениот систем на равенки претставува систем од $3N+k$ равенки во кој непознати се координатите на честичите x_i, y_i и z_i и сите множители на врски λ_j , а независна променлива е времето t . Со решавање на овој систем равенки се добиваат сите координати на честичите на системот како функции од времето и сите множители на врските. Со тоа проблемот е решен, бидејќи така сме ги добиле конечните равенки на движење на системот и силите на реакција.

Овие равенки меѓутоа имаат и некои непогодни особини кои ја ограничуваат нивната примена. Имено, равенките (7) може да ги проектираме само на оските на ортогонални системи, сите координати не се меѓусебно независни и силите на реакција однапред не се познати. Поради тоа имаме голем број скаларни равенки кои го отежнуваат решавањето на проблемот.

8. ЛАГРАНЖОВИ РАВЕНКИ

8.1. Метод на обопштени координати

Досега, поаѓајќи од дефиницијата и постулатите на силата или од Даламбер-Лагранжовиот принцип, добивавме систем диференцијалните равенки на движење од кои секоја треба да се примени на по една честица на системот. Така ги добивме равенките за слободно движење, како и за ограничено движење кои можеме да ги проектираме на оските на Декартовиот или некој друг погоден систем. Тоа е т.н. **векторски метод** во механиката бидејќи како појдовна точка служи основната равенка на динамиката за секоја

честица во векторски облик. Меѓутоа, овој метод во некои случаи може да биде непогоден за примена.

Со цел да се отстранат тешкотиите и да се добие најопшт метод за решавање на механичките проблеми се воведува **методот на обопштени координати** кој првенствено се базира на примена на математичката анализа и затоа се нарекува **аналитички метод**.

Да разгледаме систем од N честици со k холономни врски

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Поради k врски има само $3N-k$ независни Декартови координати. Бројот $n=3N-k$ кој покажува колку има независни компоненти на можните поместувања се нарекува **број на степени на слобода**.

Наместо Декартовите координати x_i, y_i и z_i да воведеме множество од $3N$ величини $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \\ &\text{-----} \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \end{aligned} \quad (1)$$

кои исто така потполно ја определуваат положбата на разгледуваниот систем и да претпоставиме дека овие равенки можат да се решат по $q_1, \dots, q_{3N}$. Ако (1) ги внесеме во равенката на врски ќе добиеме

$$f_j^*(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2)$$

Овие релации ги поврзуваат $3N$ величини q_i во вид на k релации, па ги има $n=3N-k$ независни, а останатите се зависни и да ги означиме $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+k}$ ($n+k=3N$). Да го решиме системот (2) по зависните променливи

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \varphi_{n+1}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ &\text{-----} \\ q_{n+k} &= \varphi_{n+k}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned}$$

при што времето фигурира како параметар. Со внесување на овие функции во (1) ќе ги елиминираме сите зависни величини

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1[q_1, \dots, q_n, \varphi_{n+1}(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \varphi_{n+k}(q_1, \dots, q_n, t)] \\
&\text{-----} \\
z_N &= z_N[q_1, \dots, q_n, \varphi_{n+1}(q_1, \dots, q_n, t), \dots, \varphi_{n+k}(q_1, \dots, q_n, t)]
\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^*(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\
&\text{-----} \\
z_N &= z_N^*(q_1, q_2, \dots, q_n, t)
\end{aligned} \tag{3}$$

или векторски

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{4}$$

Овие релации овозможуваат премин од Декартовите координати кон обопштени и обратно и на тој начин сите равенки на динамиката можат да се изразат и во обопштени координати.

Гледаме дека положбата на секоја честица на системот во секој момент потполно е определена од множеството на независни величини $q_1, q_2, \dots, q_n$ кои се нарекуваат **обопштени координати на системот**. Во општ случај ако имаме некој слободен систем на честици или ограничен со холономни врски, под обопштени координати на системот ќе подразбираме какво било множество на независни величини $q_1, q_2, \dots, q_n$ кои при дадени услови потполно и еднозначно ја одредуваат положбата на разгледуваниот систем. Притоа тие ја одредуваат положбата на системот како целина, па обопштените координати воопшто не се однесуваат на поединечните честици на системот. Тие величини мора да ја одредуваат положбата на системот при дадените холономни врски, па со самиот избор на обопштените координати равенките на врски во правоаголни координати се идентички задоволени. Времето во (3) потекнува од равенката на врски, па во случај на нестационарни врски релациите меѓу Декартовите и обопштените координати го содржат експлицитно и времето. Од друга страна, во Даламбер-Лагранжовиот принцип не фигурираат идеалните реакции, а поради независноста на обопштените координати не се потребни никакви дополнителни услови, како што имавме кај методот со множители на врски, па силите на реакција ни дополнително не влегуваат во сметањето. Според тоа, во

методот на обопштени координати не фигурираат експлицитно ни равенките на врски ни идеалните реакции.

Обопштените координати можат да се воведат на наведениот начин само во однос на холономните врски.

Посебното значење на методот на обопштени координати за физиката лежи во тоа што тој освен во механиката на системи може да се применува во проширена смисла во разни гранки на теориската физика: механика на континуум, електродинамика, теорија на релативност, квантна механика и квантна теорија на поле. *Така овој метод на кого се базираат Лагранжовиот и Хамилтоновиот формализам, претставува еден општ метод на теориската физика без кој не може ни да се формулира современата квантна механика.*

8.2. Лагранжови равенки

Нека $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ каде $q_i = q_i(t)$

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

$$d'\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} d'q_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

Виртуелното поместување е

$$\delta\vec{r}_i = d'\vec{r}_i - d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (5)$$

каде е воведено

$$\delta q_j = d'q_j - dq_j$$

т.е. варијација на обопштена координата или **виртуелна промена** на обопштена координата.

Виртуелната работа на активните сили во обопштени координати ќе биде

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (6)$$

каде величините

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (7)$$

се нарекуваат **обопштени сили**.

На секоја обопштена координата и одговара една обопштена сила, но бидејќи δq_j не мора да имаат димензии на должина, ни обопштените сили не мора да имаат димензија на сила, но производите $Q_j \delta q_j$ мора да имаат димензија на работа.

Виртуелната работа на фиктивната сила на инерција

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Го користиме идентитетот $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$ и

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

па

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \frac{m_i}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \end{aligned}$$

каде

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$$

е **кинетичка енергија на системот**.

Така ќе имаме

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

Внесувајќи ги овие изрази за виртуелните работи во Даламбер-Лагранжовиот принцип ќе имаме

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (8)$$

Тоа е Даламбер-Лагранжовиот принцип во обопштени координати. Ако врските се холономни, обопштените координати како и нивните варијации ќе бидат меѓусебно независни, а за горниот израз за кои било вредности δq_j да биде идентички рамен на нула, сите коефициенти пред нив треба да бидат еднакви на нула

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

Ова се Лагранжови равенки кои за разлика од Лагранжовите равенки од прв вид (равенки со множители на врски) се нарекуваат **Лагранжови равенки од втор вид**. Тоа се бараните диференцијални равенки на движење во обопштени координати кои важат како за ограничено, така и за слободно движење.

За конзервативен систем имаме $\vec{F}_i = -\text{grad}_i V$ па обопштените сили можат да бидат изразени како

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \text{grad}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\text{grad}_i V \cdot \partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial_i V}{\partial q_j}$$

односно

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \text{при што} \quad V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

и равенката (9) станува

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0$$

Бидејќи V зависи само од радиус-векторите, тој мора да е независен од обопштените брзини $\dot{q}_j$. Затоа членот $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ може да се замени со $\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j}$ и да се добие

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0$$

или ако дефинираме нова функција

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - V$$

наречена **Лагранжова функција** или лагранжијан, ќе имаме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

За сите случаи, освен ако посебно не се напомене, под Лагранжови равенки ќе се подразбираат равенки од овој облик.

Лагранжовите равенки се диференцијални равенки во обопштени координати. Да ја испитаме нивната математичка структура.

Имено, кинетичката енергија на систем во обопштени координати е

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \vec{v}_i$$

при што

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

па

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

или поконцизно

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n b_j \dot{q}_j + c \quad (11)$$

каде се воведени коефициенти

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ b_j &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \end{aligned}$$

$$c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

Равенката (11) ја изразува **кинетичката енергија во обопштени координати**. Гледаме дека таа е квадратна функција од обопштените брзини $\dot{q}_j$. Во случај на стационарни врски, т.е. $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, отпаѓаат вториот и третиот член во (11) и тогаш кинетичката енергија е хомогена квадратна функција од обопштените брзини.

Во општ случај Лагранжовите равенки (9) во експлицитен облик се

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{j\ell k} \dot{q}_\ell \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \dot{q}_k + \gamma_j = Q_j(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

каде коефициентите се функции од обопштените координати и времето.

Значи, *Лагранжовите равенки претставуваат систем од симултани обични диференцијални равенки од втор ред, линеарни по $\ddot{q}_j$, во кои непознати функции се сите обопштени координати на системот q_j ($j = 1, 2, \dots, n$), а независно променлива е времето t , при што бројот на овие равенки е еднаков на бројот на степени на слобода.*

Се покажува дека во класичната механика детерминантата $|a_{jk}| \neq 0$, па горниот систем равенки секогаш може да се реши по изводите од највисок ред $\ddot{q}_j$, па со преоѓањето на обопштени координати не е нарушен принципот на каузалност.

При примена на Лагранжовите равенки треба да се постапува на следниот начин: Прво треба да се определи бројот на степени на слобода и да се изберат најпогодните обопштени координати на системот според природата на проблемот. Потоа мора да се најдат кинетичката енергија и обопштените сили односно потенцијалната енергија како функции од обопштените координати, обопштените брзини и евентуално времето. Се поставуваат равенките и со нивно решавање земајќи ги предвид почетните услови, се добиваат обопштени координати на системот како функции од времето, а тоа се конечни равенки на движење на разгледуваниот систем.

Според тоа, Лагранжовиот метод има големи предности: *тој важи за кои било обопштени координати, сите обопштени координати се меѓусебно*

независни и не е потребно да се знаат силите на реакција, а како последица на овие особини бројот на Лагранжовите равенки претставува најмал можеен број на диференцијални равенки на движење.

На крај, да наведеме дека од Лагранжовите равенки (10) во извесни случаи можат непосредно да се добијат први интеграли. Имено ако Лагранжовата функција не зависи од една или повеќе обопштени координати

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \ell) \quad \ell \leq n$$

такви координати q_j се нарекуваат *циклични*, а Лагранжовите равенки даваат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

од каде со интеграција се добива

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const} \quad (j = 1, 2, \dots, \ell) \quad (13)$$

Значи, на секоја циклична координата, т.е. координата која не влегува експлицитно во Лагранжавата функција, ѝ одговара еден прв интеграл од обликот (13).

9. ОБОПШТЕН ПОТЕНЦИЈАЛ И РЕЛЕЕВА ДИСИПАТИВНА ФУНКЦИЈА

Лагранжовите равенки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

каде

$$L = T - V = L(q_j, \dot{q}_j, t), \quad V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

важат за полиња на конзервативни сили во кои потенцијалот е функција само од координатите. Меѓутоа, една голема класа на сили во физиката не зависат од радиус-векторите, туку од брзините. Такви се силите на триење за кои земаме дека се пропорционални на брзината, а во електродинамиката Лоренцовата сила

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

И за овој вид на сили се покажува дека можат да се изведат равенки на движење по форма слични на (1), дури и ако системот не е конзервативен, под услов обопштените сили $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ да можат да бидат добиени од една функција $U = U(q_j, \dot{q}_j)$ според изразот

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \quad (2)$$

Тогаш

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= Q_j \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

каде $L^* = T - U$, L^* - обопштен лагранжијан.

U се нарекува **обопштен потенцијал** или **потенцијал зависен од брзината**. Кај конзервативните системи обопштениот потенцијал е $U = U(q_j)$ односно

$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$ обопштената сила го има само првиот член.

Да го разгледаме подетално изразот (2).

Вториот член по развивање дава

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (**)$$

каде со $(**)$ се означени членовите кои не содржат обопштени забрзувања $\ddot{q}_k$.

Бидејќи во механиката разгледуваме само случаи на сили кои не зависат од забрзувањата, сите коефициенти пред $\ddot{q}_k$ мора да бидат еднакви на нула

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = 0$$

од каде се заклучува дека обопштениот потенцијал зависи линеарно од брзините

$$U = \sum_{j=1}^n \alpha_j \dot{q}_j + U_1 \quad (4)$$

каде α_j и U_1 се извесни функции од обопштени координати и времето.

Да го разгледаме подетално случајот на Лоренцова сила. Имајќи предвид дека

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

каде $\vec{A}$ – векторски потенцијал зависен од координатите и времето, V – скаларен потенцијал зависен од координатите и времето, $q = x$, $\dot{q} = v_x = \dot{x}$

Значи

$$\begin{aligned} \vec{F} &= e \left[-\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} \right] \\ F_x &= e \left\{ -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \right\} = \\ &= e \left\{ -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right\} = \\ &= e \left\{ -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\} = \\ &= e \left\{ -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right\} = e \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [V - (\vec{v} \cdot \vec{A})] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \right\} \end{aligned}$$

бидејќи

$$A_x = \frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial v_x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) = A_x$$

а исто така бидејќи скаларниот потенцијал не зависи од брзината, т.е. $\frac{\partial V}{\partial v_x} = 0$

ќе имаме

$$\begin{aligned} F_x &= e \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [V - (\vec{v} \cdot \vec{A})] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial v_x} [V - (\vec{v} \cdot \vec{A})] \right) \right\} = \\ &= \left\{ -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} \right\} \end{aligned}$$

каде $U = eV - e\vec{v} \cdot \vec{A}$ е обопштен потенцијал, а Лагранжовата функција е

$$L^* = T - eV + e\vec{v} \cdot \vec{A}$$

Понатаму да забележиме дека воопшто обопштените сили може да ги раздвоиме на потенцијален и непотенцијален дел и тогаш Лагранжовите равенки се

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^* \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

при што во Лагранжовата функција се вклучени потенцијалните сили, а Q_j^* се сили кои не можат да се изведат од некој потенцијал. Таква ситуација имаме во случај на системи со сили на триење.

Разгледувајќи такви сили на триење кои зависат линеарно од брзината, тогаш за x -компонентата ќе имаме

$$F_{ix} = -k_x v_{ix}$$

Вакви сили на триење можат да бидат прикажани со помош на функција R позната како **Релеева дисипативна функција** дефинирана со

$$R = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2) = \sum_i R_i$$

Лесно може да се види дека

$$F_{ix} = -\frac{\partial R}{\partial v_{ix}}$$

или целата сила на триење

$$\vec{F}_i = -grad_{\vec{v}_i} R$$

Физичкото значење на дисипативната функција е следното. Работата извршена против силата на триење е

$$dA_i = -\vec{F}_i d\vec{r}_i = -\vec{F}_i \vec{v}_i dt = (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2) dt = 2R_i dt$$

$$2R_i = \frac{dA_i}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Значи величината $2R$ ја изразува брзината на дисипација (растурање) на енергијата поради триењето.

Обопштените сили обусловени од силите на триење ќе бидат

$$Q_j^* = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i grad_{\vec{v}_i} R \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Но

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

па ќе имаме

$$Q_j^{tr} = -\sum_i \text{grad}_{\vec{v}_i} R \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_i \frac{\text{grad}_{\vec{v}_i} R \cdot \partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

Според тоа, Лагранжовите равенки во присуство на сила на триење се

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

и за да ги добиеме равенките на движење треба да бидат познати L и R .

10. ЗАКОН ЗА ЗАПАЗУВАЊЕ НА ЕНЕРГИЈАТА

Да ги испитаме законите за запазување во инерцијални системи и да ги поврземе со основните својства на просторот и времето. Инерцијалните системи се карактеризираат со тоа што просторот во однос на нив е хомоген и изотропен, а времето хомогено. Од овие својства изведен е и механичкиот принцип на инерција и тие лежат во основите на законите на механиката и теоријата на поле. Да покажеме дека од нив се добиваат и законите за запазување, така што од хомогеноста на времето произлегува запазувањето на енергијата, од хомогеноста на просторот - запазување на импулсот, а од изотропноста на просторот - запазување на моментот на импулсот.

Ќе претпоставиме, притоа, дека движењето на системот се врши без врски или со идеални холономни врски.

Ќе ги напишаме Лагранжовите равенки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

во погоден облик, разложувајќи ја обопштената сила Q_j на потенцијална и непотенцијална.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^* \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Да ја разгледаме особината на хомогеност на времето која важи само во инерцијални системи и која се состои во тоа што законите на движење на изолирани системи не смеат да зависат од изборот на почетокот на сметање на времето. Со тоа, ако извршиме трансформација

$$t \rightarrow t' = t + \delta t \quad (2)$$

Лагранжовата функција притоа мора да остане непроменета, тоа мора да го задоволува условот

$$\delta^* L \equiv \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = 0 \quad (3)$$

при што со ѕвезда означуваме дека се работи за друг тип на варијација што се сведува на

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Тоа значи дека Лагранжовата функција не смее експлицитно да зависи од времето: $L = L(q_j, \dot{q}_j)$ па имаме

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (5)$$

Заменувајќи ја овде $\partial L / \partial q_j$ од Лагранжовата равенка (1) добиваме

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - Q_j^* \right] \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j \end{aligned}$$

односно

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j \quad (6)$$

Ако силите се само потенцијални ($Q_j^* = 0$), величината во заградата, која ќе ја означиме со H , е константна со тек на времето

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{const} \quad (7)$$

Според тоа, од хомогеноста на времето во инерцијалните системи на референција, т.е. од барањето при трансформација на времето Лагранжовата функција да остане непроменета, произлегува дека $H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$ при дејство на потенцијални сили останува постојана во текот на времето, па претставува еден интеграл на движење.

За да ја видиме смислата на оваа величина, да претпоставиме дека кинетичката енергија на системот е хомогена квадратна функција од обопштните брзини, што одговара на случај кога движењето е слободно или со стационарни врски. Така

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (8)$$

при што

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Притоа

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k$$

т.е.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T$$

Ако претпоставиме дека силите се уште и конзервативни, т.е. потенцијалот е функција само од обопштени координати тогаш

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

па величината (7) добива облик

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = T + V$$

а тоа е вкупната енергија на системот

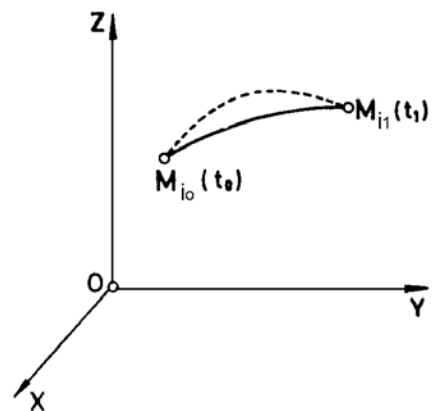
$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = T + V \equiv E = \text{const} \quad (9)$$

Значи, ако движењето на системот е слободно или со идеални и стационарни врски и ако сите сили се конзервативни, величината H претставува вкупна енергија на системот која се запазува, а како последица на хомогеноста на времето следи законот за запазување на механичката енергија.

11. ОСНОВНИ ПОИМИ ОД ВАРИЈАЦИОНО СМЕТАЊЕ

Да разгледаме систем од N честици без врски или со идеални врски и потенцијални сили и нека овој систем има n степени на слобода. Положбата на овој систем може да се одреди со помош на обопштените координати $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Да воочиме која било i -та честица и нека таа во $t = t_0$ се наоѓа во положба M_{i0} , а во $t = t_1$ во положба M_{i1} . Вистинската патека е означена со полна линија. Ако така постапиме со секоја честица на системот, при што на секоја честица ѝ одговараат извесни точки M_{i0} и M_{i1} , множеството на сите овие



вистински патеки на честиците на системот во интервалот (t_0, t_1) се нарекува прав (вистински) пат на системот.

Да замислиме сега напоредно со вистинското движење на воочената i -та честица и едно друго заобиколено движење кое ги задоволува следните услови: 1) се врши за исто време од t_0 до t_1 , 2) се врши меѓу исти точки M_{i0} и M_{i1} , 3) во согласност е со врските и 4) многу малку отстапува од вистинското движење. Таква една патека на i -та честица означена е на сликата со испрекинатата линија, а такви патеки има бесконечно многу. Ако така постапиме со секоја честица од системот, секое такво множество на така замислена патека на честиците на системот се нарекува заобиколен (околен) пат на системот.

Да ја прикажеме и геометриската интерпретација на овие поими. За таа цел воведуваме n -димензионален Евклидов простор кој претставува непосредна генерализација на тридимензионалниот Евклидов простор и како точка во тој простор да го сметаме секое подредено множество

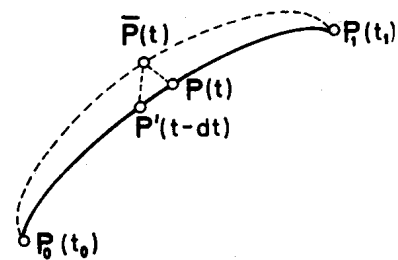
$$P = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

а метричката форма, т.е. квадратот на растојание на две бесконечно блиски точки да го дефинираме со релацијата

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n dq_j^2$$

Така дефиниран n -димензионален простор се нарекува **конфигурационен простор** и на тој начин положбата на системот честици се претставува со една единствена точка во конфигурациониот простор, чиј број на димензии е еднаков на бројот на степени на слобода.

Нека положбата на нашиот систем во момент t_0 е претставена со точка P_0 во конфигурациониот простор, а положбата на системот во моментот t_1 со точка P_1 и нека правиот пат е прикажан со полна линија меѓу точките P_0 и P_1 . Тогаш сите



останати блиски патеки во овој простор кои ги спојуваат точките P_0 и P_1 претставуваат заобиколни патишта на системот.

Нека се конечните равенки на движење на системот по правиот пат дадени со системот равенки

$$q_j = q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

а по некој фиксиран (даден) заобиколен пат

$$q_j = \bar{q}_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

каде со црта означуваме дека се работи за друг облик на функција. Да воочиме сега две положби на системот, една на правиот пат а друга на заобиколниот пат и тоа во ист момент t , претставени со точки $P(t)$ и $\bar{P}(t)$ во конфигурациониот простор. Разликите на соодветните обопштени координати

$$\delta q_j = \bar{q}_j(t) - q_j(t) \quad (1)$$

под услов $|\delta q_j| \ll |q_j(t)|$ претставуваат промени на обопштените координати кога од положбата P ќе се поместиме во положба $\bar{P}$.

Да замислиме сега можни поместувања на системот од некоја многу блиска положба P' на правиот пат на системот, која одговара на моментот $t-dt$, во положба P односно $\bar{P}$ и нека се соодветните промени на обопштените координати dq_j односно $d'q_j$. Тогаш нивните разлики $d'q_j - dq_j$ претставуваат промени на обопштени координати кога од положба P се поместиме во положба $\bar{P}$ а тоа се величините δq_j

$$\delta q_j = d'q_j - dq_j$$

Одовде гледаме дека величините (1) се специјален случај на варијации на обопштените координати дефинирани порано, во таа смисла што овде едно од можните поместувања на системот се поклопуваат со вистинското, па затоа и употребивме исти ознаки. Вака дефинираните величини (1) исто така се нарекуваат варијации на обопштените координати и тие може да се сметаат како мерка на отстапување на заобиколниот од правиот, која е изразена со промена на обликот на функцијата $q_j(t)$ кога од правиот пат се премине на заобиколниот.

Обопштувајќи го овој поим, може да се дефинира варијација на било која механичка величина A на следниот начин. Нека е $A(t)$ вредност на оваа величина на правиот пат, а $\bar{A}(t)$ вредност на таа величина на заобиколниот пат во ист момент t . Тогаш нивната разлика

$$\delta A = \bar{A}(t) - A(t)$$

се нарекува варијација на величината A и таа исто така претставува извесна мерка за отстапување на заобиколниот пат од правиот пат.

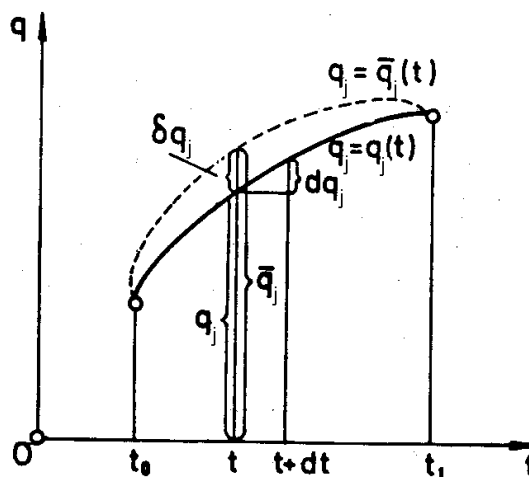
Бидејќи положбите на системот при правиот и заобиколниот пат во моментите t_0 и t_1 се поклопуваат, сите варијации на обопштените координати во моментите t_0 и t_1 ќе бидат еднакви на нула

$$\delta q_j(t_0) = 0 \quad \delta q_j(t_1) = 0$$

Во било кој друг момент тие во општ случај се различни од нула. Да воочиме било која j -та обопштена координата и да ги прикажеме графички функциите $q_j(t)$ и $\bar{q}_j(t)$.

Според дефиницијата прикажана е смислата на варијацијата δq_j за било кое време t , а напоредно со тоа и смислата на диференцијалот dq_j .

Од тука се гледа дека варијацијата на обопштената координата δq_j претставува нејзин прираст кога во одреден момент t прејдеме од правиот



пат на заобиколниот што одговара на промена на обликот на функцијата $q_j(t)$, додека нејзиниот диференцијал dq_j претставува нејзин прираст кога по должина на правиот пат се поместиме во времето од t до $t + dt$.

Од изложеното се гледа дека операцијата на варирање се однесува на промена на обликот на функцијата во одреден момент, а операцијата на диференцирање на промена на вредноста на функцијата со тек на времето. Поради тоа, тие две операции се независни меѓусебно, па може да се промени нивниот редослед

$$\delta \frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_j$$

т.е. варијацијата на временскиот извод е еднаква на временскиот извод на варијацијата на обопштената координата.

Исто така независни се и операциите на варирање и интегрирање по времето

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} q_j dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta q_j dt$$

11. ХАМИЛТОНОВ ПРИНЦИП НА НАЈМАЛО ДЕЈСТВО

Хамилтоновиот принцип е интегрален принцип за разлика од диференцијалните принципи што ги разгледавме досега. За да го добиеме ќе биде потребно да го преуредиме Даламбер-Лагранжовиот принцип

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0$$

Ќе се ограничине на случај на потенцијални сили.

Првиот член ќе биде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i (d' \vec{r}_i - d \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d' \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \text{grad}_i V \cdot d' \vec{r}_i + \\ &+ \sum_{i=1}^N \text{grad}_i V \cdot d \vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N dV_i' + \sum_{i=1}^N dV_i = -dV' + dV = -(dV' - dV) = -\delta V \\ \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i &= -\delta V \end{aligned}$$

δV - варијација на потенцијалот.

Вториот член е

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \delta \vec{r}_i) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{v}_i = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] - \delta \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right] - \delta T \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \right) \delta q_j \right] - \delta T = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - \delta T \end{aligned}$$

Ако сето ова го замениме во Даламбер-Лагранжовиот принцип

$$\begin{aligned} -\delta V - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \delta T &= 0 \\ -\delta V + \delta T &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \end{aligned}$$

$$\delta T - \delta V = \delta(T - V) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j = \delta L$$

Во оваа форма напишан Даламбер-Лагранжовиот принцип е познат под името **централна Лагранжова равенка**.

Ако оваа равенка ја интегрираме над временскиот интервал (t_0, t_1)

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

Имајќи предвид дека δq_j во моментите t_0 и t_1 се нула, тогаш и левата страна од равенката е нула, па

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

Интегралот $W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$ е познат како **Хамилтоново дејство**, па

така ќе имаме

$$\delta W \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0$$

Според тоа, *вистинското движење на систем од честици без врски или со идеални холономни врски и потенцијални сили се врши така што Хамилтоновото дејство W по должина на правиот пат има екстремална (поточно стационарна) вредност во однос на вредностите на дејството по должина на сите заобиколни патишта.*

Овој општ став, кој го карактеризира вистинското движење на системот, се нарекува **Хамилтонов принцип** или **Хамилтонов принцип на најмало дејство** и претставува *еден од најважните принципи на механиката*. Тој е формулиран во вид на услов кој мора да го задоволува дејството, и тој услов има интегрален облик и поради тоа овој принцип претставува општ интегрален принцип на механиката. Притоа, може да се покаже, со анализа на втората

варијација на дејството $\delta^2 W$, дека овој услов на стационарност за доволно мал временски интервал (t_0, t_1) секогаш се сведува на минимум дејство.

Да поставиме сега обратна задача: од сите функции $q_j = f(t)$ кои ги задоволуваат условите $\delta q_j(t_0) = 0$ и $\delta q_j(t_1) = 0$ да се најдат оние за кои Хамилтоновото дејство е стационарно, т.е. за кои е $\delta W = 0$. Така ќе имаме

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$$

па потоа варијацијата δL ќе се напише формално по правилото за тотален диференцијал, заменувајќи ги диференцијалите со варијации и ставајќи $\delta t = 0$ бидејќи времето според дефиницијата за варијација не се варира

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt$$

За да се ослободиме од варијациите на обопштените брзини кои не се независни од варијациите δq_j , го трансформираме секој интеграл во втората сума со парцијална интеграција

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d(\delta q_j) = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_j d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt \end{aligned}$$

Според тоа

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0$$

За да биде нула овој израз за кои било вредности на δq_j , поради независноста на варијациите δq_j , мора сите коефициенти пред нив да бидат еднакви на нула

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Значи, Хамилтоновиот принцип и Лагранжовите равенки се меѓусебно еквивалентни, т.е. Лагранжовите равенки ги одредуваат точно оние функции

$q_j(t)$ за кои Хамилтоновото дејство при доволно мал временски интервал (t_0, t_1) има минимална вредност.

Хамилтоновиот интегрален принцип, како типичен претставник на варијационите принципи, ги покажува предностите на варијационата концепција.

Пред сè, тој во компактна форма ја содржи во себе сета механика на системи со потенцијални сили и во него фигурираат само такви величини кои не се врзани за посебен систем на координати. Поради тоа, овој принцип е инваријантен во однос на каква било трансформација на обопштените координати.

Втора важна карактеристика на овој принцип се состои во тоа што тој може да се прошири и на системи кои не се од чисто механичка природа, како на пример еластичните средини, електромагнетните полиња на елементарните честици. Притоа овој принцип се формулира на следниот начин: ако се познати равенките на разгледуваниот систем, како на пример Максвеловите равенки на електромагнетното поле, се поставува прашање дали тие равенки можат да се сфатат како варијациони Ојлер-Лагранжови равенки, кои изразуваат стационарност на некој интеграл. Ако е тоа можно, тоа е соодветен Хамилтонов принцип и така сфатен принцип може да се применува во разни гранки на теориската физика: во механиката на континуум, термодинамика, електродинамика, теорија на релативност, квантна механика и квантна теорија на поле. На тој начин, *Хамилтоновиот принцип може да се смета за еден општ принцип на теориската физика, кој ги обединува разните нејзини гранки во една единствена целина.*

12. ОБОПШТЕНИ ИМПУЛСИ

Да разгледаме систем од N честици со n степени на слобода без врски или со идеални холономни врски и со потенцијални сили. Видовме дека во тој случај најпогодни диференцијални равенки на движење се Лагранжовите равенки.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

кои претставуваат систем од n симултани обични диференцијални равенки од втор ред во однос на непознатите функции $q_j(t)$. Да поставиме прашање дали може да се намали редот на овие диференцијални равенки, така што овој систем на диференцијални равенки од втор ред да го замениме со извесен систем диференцијални равенки од прв ред. Очигледно тоа може да се постигне само на тој начин што бројот на диференцијални равенки да се удвои, со што и бројот на непознати функции исто така мора да се удвои, што може да се направи на бесконечно многу начини.

Таа цел најпогодно може да се постигне ако за нови непознати функции се земат величините $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ кои ќе ги означиме со p_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Вака дефинираните величини се нарекуваат **обопштени импулси**, при што на секоја обопштена координата ѝ одговара еден коњугиран (придружен) обопштен импулс. Меѓутоа, обопштени импулси не мора да имаат димензија на импулс, како што ни обопштените координати не мора да имаат димензија на должина. Според начинот на воведување обопштените импулси се потполно рамноправни со обопштените координати, а заедно со нив се нарекуваат **канонски променливи**.

За да ја видиме смислата на обопштени импулси, да разгледаме слободно движење на систем и за обопштени координати да ги земеме правоаголните координати на честиците на системот. Тогаш

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_j, y_j, z_j, t)$$

па за соодветните обопштени импулси добиваме

$$p_{xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \quad p_{yi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i \quad p_{zi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i$$

а тоа всушност се компоненти на импулсот на честиците од системот. Значи, во случај на слободно движење на систем и правоаголни координати, обопштените импулси претставуваат компоненти на импулсот на честица од

системот и во таа смисла обопштените импулси претставуваат генерализација на поимот импулс.

Да ги испитаме поподробно равенките (2). Лагранжовата функција во општ случај има облик

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^n b_j \dot{q}_j + c \quad (3)$$

при што коефициентите зависат од обопштените координати и времето. Тогаш обопштените импулси ќе бидат линеарни функции од обопштените брзини

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

Тоа е експлицитниот облик на системот равенки (2), кои ни ги даваат врските меѓу обопштените импулси и обопштените брзини.

За да ја испитаме можноста за решавање на овој систем равенки по величините $\dot{q}_j$, да ја проучиме детерминантата на овој систем $|a_{jk}|$.

Ако претпоставиме дека $|a_{jk}| = 0$ тоа би било услов системот на хомогени равенки по $\dot{q}_k$ со исти коефициенти

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

има решенија различни од нула $\dot{q}_k \neq 0$.

Овој систем равенки може да се напише и во облик

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

каде T_2 е квадратниот член во изразот за кинетичката енергија, т.е.

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (7)$$

Бидејќи како што веќе имавме

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2 \quad (8)$$

па заклучуваме, имајќи предвид (6), дека и T_2 мора да биде еднаков на нула, што е можно само кога сите $\dot{q}_j$ се еднакви на нула. Но тоа е во противречност

со претпоставката за $\dot{q}_k \neq 0$. Според тоа и првобитната претпоставка $|a_{jk}| = 0$ нема смисла, па мора да биде

$$|a_{jk}| \neq 0 \quad (9)$$

Овој важен заклучок има значење и за порано разгледуваните Лагранжови равенки. Овде има значење заради тоа што сега равенките (2) може да ги разрешиме по $\dot{q}_j$, т.е.

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} p_k + d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

каде c_{jk} и d_j се некои нови коефициенти.

Според тоа, системот равенки кој ги дефинира обопштените импулси, во класичната механика секогаш може да се реши по обопштени брзини, па обопштените брзини секогаш можат да се заменат со обопштени импулси.

Како пример да го разгледаме движењето на една честица во рамнина изразено во поларни координати. Тогаш

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r, \varphi, t)$$

па соодветните обопштени импулси се

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$$

Првиот обопштен импулс има димензија на импулс, додека вториот нема. Истовремено гледаме дека овој систем равенки навистина може да се реши по обопштени брзини.

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

Да ја испитае смислата на обопштениот импулс p_φ . За таа цел да го разгледаме елементот на површина која ја опишува радиус-векторот $\vec{r}$ на разгледуваната честица во интервалот на време $(t, t + dt)$

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

Опишаната површина во единица време, т.е. секторската брзина е

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

Од сликата гледаме дека, со занемарување на бесконечно малите величини од повисок ред,

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

па интензитетот на секторската брзина е

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

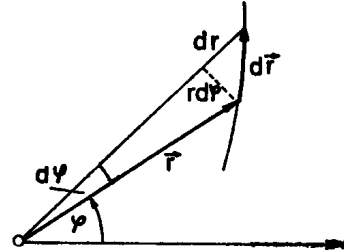
а од претходното

$$L = 2m\sigma = mr^2\dot{\varphi}$$

а тоа е обопштениот импулс p_φ , т.е.

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = L$$

Значи, при движење на честица во рамнина обопштениот импулс p_φ претставува интензитет на моментот на импулсот на оваа честица. Од таа причина моментот на импулсот се нарекува и **ангуларен, аголен момент**.



13. ХАМИЛТОНОВИ РАВЕНКИ

Да поминеме сега на добивање на бараните диференцијални равенки на движење од прв ред. Ако ги воведеме обопштените импулси како нови непознати функции во Лагранжовите равенки ќе имаме

$$\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

односно

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

Во овој вид на Лагранжовите равенки фигурираат само првите изводи од непознатите функции q_j и p_j .

Од друга страна, да формираме варијација на $L(q_j, \dot{q}_j, t)$

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$$

па според дефиницијата на обопштени импулси и Лагранжовите равенки (1) добиваме

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \delta q_j + \sum_{j=1}^n p_j \delta \dot{q}_j$$

Бидејќи е

$$p_j \delta \dot{q}_j = \delta(p_j \dot{q}_j) - \dot{q}_j \delta p_j$$

претходниот израз ќе биде

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \delta q_j + \delta \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \delta p_j$$

а оттука

$$\delta \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L \right) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \delta p_j - \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \delta q_j \quad (2)$$

Одовде гледаме дека варијацијата на изразот $\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L$ е таква што

таа е линеарна функција од δp_j и δq_j , па овој израз, кој ќе го означиме со H , може да го сметаме како функција од обопштени координати, обопштени импулси и времето

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L$$

Вака дефинирана функција $H(q_j, p_j, t)$ се нарекува **Хамилтонова функција**.

Според тоа релацијата (2) може да ја напишеме во облик

$$\delta H = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \delta p_j - \sum_{j=1}^n \dot{p}_j \delta q_j$$

Меѓутоа може и непосредно да формираме варијација на Хамилтоновата функција, сметајќи ја функција од променливите q_j , p_j и t

$$\delta H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j$$

Со споредување на овие два изрази заклучуваме дека поради независноста на варијациите δp_j и δq_j соодветните коефициенти пред нив мора да бидат меѓусебно еднакви

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3)$$

Овие равенки се нарекуваат **Хамилтонови равенки** или канонски равенки на движење и тие ги претставуваат бараните диференцијални равенки на движење од прв ред по непознатите функции $q_j(t)$ и $p_j(t)$.

Исто како за Лагранжовите равенки може да се покаже дека Хамилтоновите равенки и Хамилтоновиот принцип се еквивалентни, т.е. Хамилтоновите равенки го одредуваат баш оние функции $q_j(t)$ и $p_j(t)$ за кои Хамилтоновото дејство има стационарна вредност.

Да го покажеме начинот на формирање на Хамилтоновата функција. Ако ја формираме според самата дефиниција

$$H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

се добива некоја функција $f(q_j, \dot{q}_j, p_j, t)$. Меѓутоа, според самиот начин на воведување заклучивме дека Хамилтоновата функција мора да биде изразена само со помош на обопштени координати, обопштени импулси и времето и основниот проблем на премин од Лагранжовиот на Хамилтоновиот формализам се состои во тоа како горната функција да се добие како функција само од наведените променливи.

За таа цел треба да се тргне од равенките

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

кои експлицитно ќе имаат облик

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + b_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

Овој систем на равенки, како што покажавме, секогаш е можно да се реши по променливите $\dot{q}_j$. Ако сега така добиените решенија за $\dot{q}_j$ ги внесеме во Хамилтоновата функција, ќе добиеме

$$H = \sum_{j=1}^n p_j \varphi_j(q_k, p_k, t) - L(q_j, \varphi_j(q_k, p_k, t), t) \equiv F(q_j, p_j, t)$$

со што оваа величина H навистина е изразена во бараниот облик, т.е. како функција од променливите q_j, p_j и t .

Какво е физичкото значење на Хамилтоновата функција. Како што покажавме величината

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \\ &= 2T - (T - V) = T + V \end{aligned}$$

односно

$$H = T + V = E$$

Значи, ако сите сили кои делуваат на системот се потенцијални, а движењето на системот е слободно или со стационарни врски, Хамилтоновата функција претставува вкупна енергија на системот.

Под кои услови Хамилтоновата функција е интеграл на движење. За таа цел да ја диференцираме тотално по времето

$$\frac{d}{dt} H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t}$$

па со замена на $\dot{q}_j$ и $\dot{p}_j$ од Хамилтоновите равенки

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

односно

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Одовде гледаме дека ако е $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, со интеграција непосредно добиваме

$$H(q_j, p_j, t) = \text{const}$$

Значи, ако Хамилтоновата функција не зависи експлицитно од времето, таа претставува еден интеграл на движење, кој обично се поклопува со законот за запазување на енергијата.

Ваков случај имаме ако движењето на системот е слободно или со стационарни врски и ако сите сили се конзервативни.

Системот Хамилтонови равенки

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

претставува *систем од $2n$ симултани обични диференцијални равенки од прв ред решени по $\dot{q}_j$ и $\dot{p}_j$, во кои непознати функции се обопштените координати и обопштените импулси, а независно променлива времето t , при што бројот на овие равенки е еднаков на удвоениот број на степени на слобода.*

При примена се постапува слично како и со Лагранжовите равенки. Меѓутоа, посебното значење на Хамилтоновите равенки лежи во следново. Додека непознатите функции во Лагранжовите равенки - обопштените координати ја одредуваат само положбата на системот, непознатите функции во Хамилтоновите равенки - обопштените координати и обопштените импулси ја одредуваат не само положбата туку и состојбата на движење на системот. Значи, *Хамилтоновите равенки непосредно ја одредуваат механичката состојба на системот и поради тоа тие играат голема улога во сите оние гранки на теориската физика кои се базираат на поимот состојба на системот.* Таков случај имаме во статистичката физика и квантната механика.

Соодветна геометриска интерпретација може да се добие со воведување на $2n$ - димензионален Евклидов простор, во кој под точка ќе подразбираме подредено множество (збир)

$$x = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

и во кој метричката форма е дефинирана со релацијата

$$ds^2 = \sum_{j=1}^n dq_j^2 + \sum_{j=1}^n dp_j^2$$

Вака дефинираниот $2n$ -димензионален Евклидов простор се нарекува **фазен простор** и со помош на него механичката состојба на системот честици се претставува со една единствена точка, т.н. репрезентативна точка во фазниот простор, чиј број на димензии е еднаков на удвоениот број на степени на слобода.

15. ПОАСОНОВИ ЗАГРАДИ

Во тесна врска со Хамилтоновите равенки се т.н. Поасонови загради.

Да земеме каква било механичка величина F која е функција од обопштените координати, обопштените импулси и времето

$$F = F(q_j, p_j, t)$$

па да го побараме нејзиниот тотален извод по времето

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1)$$

Ако во овој израз ги замениме $\dot{q}_j$ и $\dot{p}_j$ според Хамилтоновите равенки добиваме

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Посматрајќи го првиот член гледаме дека ако воведеме ознака

$$[u, v] = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \quad (2)$$

претходната равенка може да ја напишеме во концизен облик

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3)$$

Изразот (2) се нарекува **Поасонова заграда** на функциите $u(q_j, p_j, t)$ и $v(q_j, p_j, t)$, а добиените равенки (3) го определува тоталниот извод по времето на било која функција од облик $F(q_j, p_j, t)$. Бидејќи при ова изведување се користени Хамилтоновите равенки, последната равенка е еквивалентна на нив, па може да се смета и како општа равенка на движење.

Да ја примениме равенката (3) за добивање на попогоден облик на Хамилтоновите равенки. Да поставиме $F = q_j$, па бидејќи q_j не зависи експлицитно од времето, имаме

$$\frac{dq_j}{dt} = [q_j, H] \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Ставајќи пак $F = p_j$ и бидејќи ни p_j не зависи експлицитно од времето, добиваме

$$\frac{dp_j}{dt} = [p_j, H] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Овие равенки претставуваат Хамилтонови равенки во облик на Поасоновите загради. Тие имаат предност што во нив формално се раздвоени обопштени координати и обопштени импулси, бидејќи првиот систем содржи само обопштена координата, а вториот само обопштен импулс.

Равенките на класичната механика во овој облик покажуваат голема формална сличност со основните равенки на квантната механика.

Да го испитаме случајот кога некоја функција $F(q_j, p_j, t)$ е константна во текот на времето

$$F(q_j, p_j, t) = \text{const}$$

т.е. кога е

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

Таква функција од канонски променливи $F(q_j, p_j, t)$ која не се менува во текот на времето се нарекува **прв интеграл на движење** или константа на движење. Тогаш

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Значи, секоја константа на движење мора да го задоволува условот (4), кој претставува потребен и доволен услов некоја механичка величина да биде интеграл на движење.

Доколку пак F не зависи и експлицитно од времето, претходниот услов се поедноставува

$$[F, H] = 0$$

т.е. ако константата на движење не зависи експлицитно од времето, нејзината Поасонова заграда со Хамилтоновата функција е еднаква на нула. На пример ако Хамилтоновата функција H не зависи експлицитно од времето, бидејќи е $[H, H] \equiv 0$, таа ќе биде константа на движење што е во согласност со порано изведениот заклучок за H .

16. КАНОНСКИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Да претпоставиме дека во фазниот простор постојат извесни трансформации меѓу старите канонски променливи q_j и p_j и новите променливи $\bar{q}_j$ и $\bar{p}_j$. Трансформационите релации нека се

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(q_j, p_j, t) \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$\bar{p}_j = \bar{p}_j(q_j, p_j, t)$$

односно

$$q_j = q_j(\bar{q}_j, \bar{p}_j, t) \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$$p_j = p_j(\bar{q}_j, \bar{p}_j, t)$$

Ако постои таква функција

$$K = K(\bar{q}_j, \bar{p}_j, t)$$

така што Хамилтоновите равенки со оваа трансформација да останат инваријантни

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}_j}, \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}_j} \quad (j=1,2,\dots,n)$$

т.е. би го задржале својот поранешен облик, тогаш трансформацијата

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j(q_j, p_j, t), \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(q_j, p_j, t) \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (1)$$

се нарекува **канонска трансформација**.

Да го побараме условот трансформацијата (1) да биде канонска.

Хамилтоновиот принцип во старите променливи може да го напишеме како

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0 \quad (2)$$

а во новите канонски променливи гласи

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^n \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - K \right) dt = 0 \quad (3)$$

Од друга страна, за било која функција F од старите и новите променливи поради поклопување на положбата на системот при прав и заобиколен пат за $t = t_0$ и $t = t_1$ ќе биде

$$\delta F(t_0) = 0 \quad \delta F(t_1) = 0$$

па ќе имаме

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} dt = \delta(F(t_1) - F(t_0)) = \delta F(t_1) - \delta F(t_0) = 0$$

т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} \delta t = 0$$

Одовде гледаме дека равенките (2) и (3) ќе бидат задоволени и ако соодветните подинтегрални изрази се разликуваат за тотален извод по времето од уочената функција

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - K + \frac{dF}{dt}$$

односно

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - H dt = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j d\bar{q}_j - K dt + dF \quad (4)$$

Тоа е бараниот услов некоја трансформација од облик (1) да биде канонска, а вака дефинираната функција F се нарекува **генератриса на канонската трансформација**.

Бидејќи равенките (1) претставуваат $2n$ врски меѓу $4n$ стари и нови променливи, од сите променливи $q_j, p_j, \bar{q}_j$ и $\bar{p}_j$ има само $2n$ независни. Поради тоа генератрисата F може да биде во еден од следните типови

$$F_1(q_j, \bar{q}_j, t); \quad F_2(q_j, \bar{p}_j, t); \quad F_3(p_j, \bar{q}_j, t); \quad F_4(p_j, \bar{p}_j, t)$$

За нас се од интерес првите две.

Да видиме како можеме да ја определиме канонската трансформација со помош на генератрисата.

Ако земеме $F = F_1(q_j, \bar{q}_j, t)$ условот (4) за постоење на канонска трансформација ќе гласи

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - Hdt = \sum_{j=1}^n \bar{p}_j d\bar{q}_j - Kdt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j} d\bar{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (5)$$

Бидејќи променливите $q_j, \bar{q}_j$ и t во овој случај се земени како независни, соодветните коефициенти на двете страни мора да бидат меѓусебно еднакви

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad 0 = \bar{p}_j + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j}, \quad -H = -K + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

односно

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad \bar{p}_j = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_j} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (6)$$

Овие изрази ја одредуваат канонската трансформација со генератриса од типот $F_1(q_j, \bar{q}_j, t)$.

За да преминеме на вториот тип на генератриса, да го напишеме условот (5) во облик

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - Hdt = d \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \bar{q}_j - \sum_{j=1}^n \bar{q}_j d\bar{p}_j - Kdt + dF_1$$

односно

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - Hdt = -\sum_{j=1}^n \bar{q}_j d\bar{p}_j - Kdt + d \left(F_1 + \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \bar{q}_j \right) \quad (7)$$

Одовде гледаме дека изразот во заграда е таков што неговиот диференцијал е линеарна функција од диференцијалите $dq_j, d\bar{p}_j$ и dt , па може да го сметаме како функција од променливите $q_j, \bar{p}_j$ и t

$$F_2(q_j, \bar{p}_j, t) = F_1 + \sum_{j=1}^n \bar{p}_j \bar{q}_j$$

Тој израз претставува генератриса од типот F_2 , а релацијата (7) во експлицитен облик ќе биде

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - Hdt = -\sum_{j=1}^n \bar{q}_j d\bar{p}_j - Kdt + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_j} d\bar{p}_j + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

Бидејќи променливите $q_j, \bar{p}_j$ и t се независни со споредување на соодветните коефициенти добиваме

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad 0 = -\bar{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_j}, \quad -H = -K + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

односно

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad \bar{q}_j = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_j}, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Со овие релации е одредена канонската трансформација со вториот тип генератриса.

17. ХАМИЛТОН - ЈАКОБИЕВА РАВЕНКА

Да разгледаме сега таква канонска трансформација при која новата Хамилтонова функција е идентички рамна на нула

$$K(\bar{q}_j, \bar{p}_j, t) = 0 \quad (1)$$

и да земеме за генератриса функција од типот $F_2(q_j, \bar{p}_j, t)$ која ќе ја означиме овде со S

$$F = F_2(q_j, \bar{p}_j, t) \equiv S \quad (2)$$

Тогаш поради условот (1) Хамилтоновите равенки во новите канонски променливи ќе бидат

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}_j} = 0 \quad \dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}_j} = 0$$

од каде добиваме

$$\bar{p}_j = \alpha_j = \text{const}, \quad \bar{q}_j = \beta_j = \text{const} \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3)$$

Значи, канонската трансформација при која новата Хамилтонова функција е идентички рамна на нула дава како нови канонски променливи константи на движење.

Врз основа на овие релации во разгледуваната генератриса може да поставиме $\bar{p}_j = \alpha_j$

$$S = S(q_j, \alpha_j, t)$$

па за канонската трансформација ќе имаме

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad \beta_j = \bar{q}_j = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad (j=1,2,\dots,n) \quad K = 0 = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4)$$

Притоа, Хамилтоновата функција H е извесна функција од обопштени координати, обопштени импулси и времето, па ако во таа функција ги замениме обопштените импулси според првиот систем равенки (4) со $\frac{\partial S}{\partial q_j}$ ќе имаме

$$H = H(q_j, p_j, t) = H\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right)$$

па последната равенка (4) добива облик

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}, t\right) = 0 \quad (5)$$

Оваа равенка се нарекува **Хамилтон-Јакобиева равенка**. Таа е парцијална диференцијална равенка од прв ред, во која непозната функција е генератрисата S на оваа канонска трансформација, при која новата Хамилтонова функција е идентички рамна на нула, а независно променливи се сите обопштени координати q_j и времето t . Решението на оваа равенка се нарекува Хамилтон-Јакобиева генератриса.

За да ја видиме смислата на Хамилтон-Јакобиевата генератриса, да го побараме нејзиниот тотален извод по времето

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t}$$

а врз основа на првата релација од (4) и Хамилтон-Јакобиевата равенка (5) овој израз може да се напише

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H$$

односно

$$\frac{dS}{dt} = L$$

па со интеграција по времето од t_0 до t добиваме

$$S = \int_{t_0}^t L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$$

Значи, *Хамилтон-Јакобиевата генератриса претставува Хамилтоново дејство со неопределена горна граница.*

Хамилтон-Јакобиевата генератриса прикажана како функција од обопштени координати, нивните почетни вредности и времето се нарекува **главна Хамилтонова функција** $S = S^*(q_j, q_{j0}, t)$

Да претпоставиме дека сме го нашле решението, односно потполниот интеграл на Хамилтон-Јакобиевата равенка во облик

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, a_1, \dots, a_n) + a_{n+1}$$

кој содржи $n+1$ произволни константи a_j колку и независно променливи q_j и t . Тоа обично се постигнува со методот на раздвојување на променливите кој се состои во тоа решението да се бара во облик

$$S = S_1(q_1) + \dots + S_n(q_n) + S_{n+1}(t)$$

или

$$S = S_1(q_1) \cdots S_n(q_n) \cdot S_{n+1}(t)$$

Бидејќи во Хамилтон-Јакобиевата равенка фигурираат само парцијални изводи на S , адитивната константа a_{n+1} нема никакво влијание, па може да земеме дека е рамна на нула

$$S = S(q_j, a_j, t) \quad (6)$$

Да формираме сега систем равенки составен од првиот систем (4) и од равенки добиени со диференцирање на функцијата (6) по параметарот a_j и изедначување со нови произволни константи b_j , односно

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial S}{\partial a_j} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

Може да се покаже дека системот равенки (7) каде $S(q_j, a_j, t)$ е еден потполн интеграл на Хамилтон-Јакобиева равенка, за било кои вредности на константите a_j и b_j претставува потполн систем на интегрални на Хамилтоновите равенки на движење. Овој став е познат под името **Јакобиева теорема**.

Да ги избереме сега за произволни константи баш константните вредности на новите обопштени импулси α_j и новите обопштени координати β_j дефинирани со (3)

$$a_j = \alpha_j = \bar{p}_j, \quad b_j = \beta_j = \bar{q}_j$$

Тогаш потполниот интеграл (6) добива облик

$$S = S(q_j, \alpha_j, t)$$

и ако оваа функција ја внесеме во равенките (4) добиваме систем од $2n$ равенки

$$\frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Левите страни на овие равенки ќе бидат извесни функции од променливите q_j, α_j и t , само што овде непознати се обопштените координати и обопштените импулси. Со решавање на вториот систем равенки (8) по величините q_j ќе ги добиеме нив во облик

$$q_j = q_j(t, \alpha_k, \beta_k) \quad j = (1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

а со внесување на овие изрази во првиот систем равенки (8) непосредно ги добиваме и величините p_j

$$p_j = p_j(t, \alpha_k, \beta_k) \quad j = (1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

Овие равенки (9) и (10) ги одредуваат сите обопштени координати и обопштени импулси, т.е. непознатите функции во Хамилтоновите равенки како функции од времето t , па претставуваат решенија на Хамилтоновите равенки, а произволните константи α_k и β_k претставуваат интеграциони константи одредени од почетните услови.

Според тоа, ако најдеме еден потполн интеграл на Хамилтон-Јакобиевата равенка, со алгебарско решавање на Јакобиевиот систем равенки (8) по величините q_j и p_j ќе ги добиеме решенијата на Хамилтоновите равенки. На тој начин решавањето на динамичкиот проблем е сведено на наоѓање на еден потполн интеграл на Хамилтон-Јакобиевата равенка.

18. ЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНО ДВИЖЕЊЕ ВО ПОЛЕ НА КОНЗЕРВАТИВНИ СИЛИ

Да разгледаме еднодимензионално движење на една честица вдоль некоја права која ја земаме за X -оска, во поле на конзервативни сили со потенцијал $V(x)$. Лагранжова функција на таква честица ќе биде

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

а соодветната Лагранжова равенка

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

односно

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{dV}{dx} = 0$$

Меѓутоа, во проблеми од овој вид не е секогаш неопходно да се изврши интеграција на оваа равенка и така да се добие конечната равенка на движење, туку доволно е непосредно да се појде од нејзиниот прв интеграл - законот за запазување на механичката енергија

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$$

Тоа е диференцијална равенка од прв ред, која може да се интегрира со раздвојување на променливи

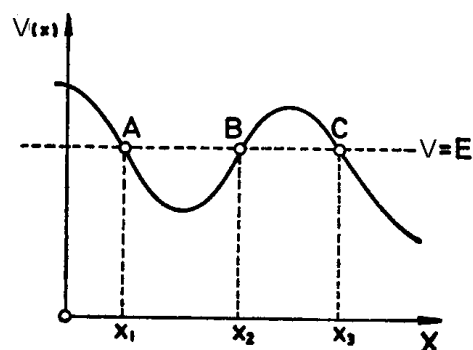
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}$$

од каде се добива

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + C$$

Улога на интеграциони константи играат вкупната енергија E и адиционата константа C кои се одредени со почетните услови.

Бидејќи кинетичката енергија не може да биде негативна, при движење на разгледуваната честица вкупната енергија мора да биде поголема од потенцијалната енергија $T = E - V > 0$, т.е. движењето на честицата се врши само во оние области во кои $V(x) < E$. Нека на пример $V(x)$



има облик како на сликата и да го прикажеме на тој график нивото на вкупната енергија со правата $V = E$. Тогаш движењето на честицата е можно само во областа AB ($x_1 < x < x_2$) или во областа десно од C ($x > x_3$). Точките во

кои потенцијалната енергија е еднаква на вкупната $V(x) = E$ ги одредуваат границите на движење на разгледуваната честица и претставуваат точки во кои нејзината брзина е нула. Ако е областа на движење ограничена со две такви точки, движењето на честицата се врши во ограничена област на просторот и такво движење се нарекува **финитно, конечно**. Точките се нарекуваат точки на мирување, возвратни точки. Доколку областа на движење не е ограничена барем од една страна, за такво движење велиме дека е **инфинитно**.

Еднодимензионалното финитно движење периодично се повторува меѓу крајните точки, т.е. претставува осцилаторно движење. Притоа поради инваријантноста на диференцијалните равенки на движење во однос на трансформацијата $t \rightarrow -t$, времето на движење од x_1 до x_2 ќе биде еднакво на времето на обратно движење од x_2 до x_1 . Поради тоа периодот на осцилации, т.е. времето за кое честицата ќе се врати во првобитната кинематичка состојба е еднакво на удвоеното време за кое честицата ќе го помине патот од x_1 до x_2 и изнесува

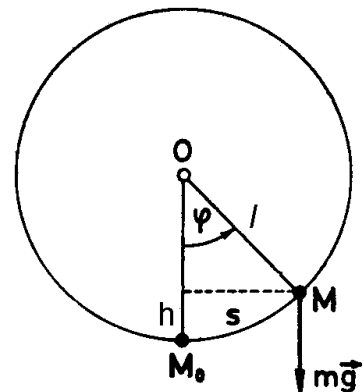
$$\tau(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Овде $x_1(E)$ и $x_2(E)$ се корени на равенката $V(x) = E$ и оваа релација го определува периодот на осцилирање на честицата како функција од нејзината енергија E .

19. МАТЕМАТИЧКО НИШАЛО

Како пример на ограничено движење со еден степен на слобода да го земеме **математичкото нишало** т.е. *движење на честица по круг во вертикална рамнина под дејство на земјина тежа*.

Бидејќи ова движење е по линија, тоа има еден степен на слобода, а положбата на



оваа честица потполно е одредена со аголот на отклон φ од вертикалата. Поради тоа можеме овој агол да го земеме како обопштена координата и да ја примениме Лагранжовата равенка

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Овде $s = \ell \varphi$ па

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

а потенцијалната енергија во однос на најниската положба е

$$V = mgh = mg\ell(1 - \cos \varphi)$$

Тогаш

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 - mg\ell(1 - \cos \varphi)$$

па

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \ell^2 \dot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg\ell \sin \varphi$$

т.е.

$$\frac{d}{dt} (m \ell^2 \dot{\varphi}) + mg\ell \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0$$

Тоа е **диференцијална равенка на движење на математичко нишало**.

Нејзиниот прв интеграл може да се најде ако ја помножимо со $d\varphi$

$$\ddot{\varphi} d\varphi = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi d\varphi$$

а бидејќи е

$$\ddot{\varphi} d\varphi = \ddot{\varphi} \dot{\varphi} dt = \dot{\varphi} d\dot{\varphi}$$

горната равенка е

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi d\varphi$$

Со интеграција добиваме

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{\ell} \cos \varphi + C_1 = \frac{g}{\ell} (\cos \varphi + C) \quad (1)$$

каде е $C_1 = \frac{g}{\ell} C$ интеграциона константа. Овој прв интеграл е еквивалентен на законот за запазување на енергијата

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell(1 - \cos \varphi) = E$$

од каде следи

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{\ell}(\cos \varphi - 1) + \frac{E}{m\ell^2}$$

што е од ист облик како и равенката (1) само изразено со друга интеграциона константа $C = \frac{E}{mg\ell} - 1$ каде E е нова интеграциона константа. Со анализа на добиениот прв интеграл можеме да ги испитаме можните видови на движење на математичкото нишало. Ако $C > 1$ секогаш $\dot{\varphi}^2 > 0$ па аголот φ нема ни максимум ни минимум и движењето е прогресивно. Ако $C = 1$ ќе биде $\dot{\varphi}^2 \geq 0$ при што знакот на еднаквост важи само за $\varphi = \pi$ па ова движење е граничен случај на претходното и е асимптотско. Ако $-1 < C < 1$ постојат два агли за кои $\dot{\varphi} = 0$, такво движење е осцилаторно меѓу тие два агли. На пример за $C = 0$ можни се само оние агли за кои $\cos \varphi \geq 0$, т.е. φ се менува меѓу $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Ако $C = -1$ ќе биде $\dot{\varphi}^2 \leq 0$ при што знакот рамно овде важи само за $\varphi = 0$ па честичката стално мирува во рамнотежната положба. Најпосле, ако е $C < -1$ секогаш е $\dot{\varphi}^2 < 0$ и движењето не е воопшто можно.

Да се ограничине понатаму на осцилаторно движење. Тогаш е $-1 < C < 1$ па може да поставиме

$$C = -\cos \varphi_0$$

воведувајќи така наместо интеграциона константа C нова интеграциона константа φ_0 . Равенката (1) добива облик

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

и од неа може да ја видиме смислата на φ_0 . Ако е $\varphi = \pm\varphi_0$ ќе биде $\dot{\varphi} = 0$, па φ достигнува во тој случај максимум или минимум. Според тоа константата φ_0 претставува максимална апсолутна вредност на аголот φ , т.е. таа е амплитуда на осцилациите. Бидејќи е

$$\cos \varphi = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

претходната равенка може да ја запишеме како

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{\ell} \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

Одовде имаме

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

а после раздвојувањето на променливите имаме

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} dt = \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

па со интеграција добиваме

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} t = \int_0^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

каде ставивме

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

при што времето го сметаме од моментот кога честицата била во најниска положба.

Ако воведеме нова променлива

$$\sin \frac{\varphi}{2} = ku \tag{2}$$

од каде имаме

$$\cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = kdu, \quad d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{kdu}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{kdu}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{kdu}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$$

претходната равенка може да ја напишеме

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} \tag{3}$$

Интегралот на десната страна

$$J = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

претставува т.н. **елиптички интеграл од прв вид** и не може да се изрази со помош на елементарни функции. Овој интеграл е извесна функција од горната граница

$$J = f(u)$$

а ако сакаме горната граница да ја прикажеме како функција од самиот интеграл, оваа инверзна функција исто така не може да се изрази со помош на елементарни функции и се означува со симболот

$$u = \operatorname{sn} J$$

Вака воведената функција sn , дефинирана со инверзија на горниот интеграл, се нарекува **синусна елиптичка функција** и постојат нумерички таблици со помош на кои за секоја вредност на аргументот може да се најде вредноста на оваа функција.

Во нашиов случај $J = \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$, па може

$$u = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right) \quad (4)$$

Според релациите (2) и (4) имаме

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right)$$

и оваа равенка го определува аголот на отклон φ како функција од времето, па претставува **конечна равенка на движење на математичко нишало**.

19.1. Период на осцилации

За да го најдеме периодот на осцилации, ја применуваме равенката (3) на највисоката положба на математичкото нишало. Тогаш времето t претставува четвртина од периодот T , а променливата u според (2) има вредност единица, па имаме

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} \frac{T}{4} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

односно

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

Овој интеграл може да го трансформираме со смената

$$u = \sin \xi \quad du = \cos \xi d\xi$$

со што добивме

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}$$

Ако подинтегралната функција ја развиеме во ред по степените од $k^2 \sin^2 \xi$ имаме

$$\begin{aligned} (1-k^2 \sin^2 \xi)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \xi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 \xi + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} k^{2n} \sin^{2n} \xi \end{aligned}$$

Бидејќи секој член од овој ред, освен првиот, е помал од соодветниот член на опаѓачкиот геометриски ред

$$1 + k^2 \sin^2 \xi + k^4 \sin^4 \xi + k^6 \sin^6 \xi + \dots$$

овој ред униформно конвергира за сите вредности на ξ , па може да се интегрира член по член

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} k^{2n} \sin^{2n} \xi \right] d\xi$$

т.е.

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \xi d\xi \right]$$

Овој интеграл може да се пресмета со последователна парцијална интеграција

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \xi d\xi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

па добиваме

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right]^2 k^{2n} \frac{\pi}{2} \right\}$$

т.е.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (5)$$

Оваа формула го одредува **периодот на осцилации на математичкото нишало**. Имајќи предвид дека k зависи од амплитудата φ_0 , гледаме дека периодот на осцилации зависи не само од должината на нишалото и забрзувањето на земјината тежа, туку и од амплитудата на осцилациите.

19.2. Случај на мали осцилации

Да го испитаме уште и случајот на многу мали осцилации ($\varphi < 7^\circ$). Тогаш φ_0 , а исто така и k е многу мало во однос на единица, па во (3) може да го занемариме k^2

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$$

Со инверзија добиваме

$$u = \sin \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right)$$

а бидејќи во овој случај според (2) приближно имаме

$$u = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \approx \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

претходната равенка ќе биде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t \right)$$

Соодветниот период на осцилации може да го најдеме од (5) со занемарување на членовите со степени од k^2 , со што во прва апроксимација добиваме

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Добиените релации ја одредуваат **конечната равенка на движење и периодот на малите осцилации на математичкото нишало**. Оттука гледаме дека во случај на мали осцилации аголот на отклон се менува чисто хармониски со времето, а периодот на осцилациите не зависи од амплитудата.

Во овој случај и потенцијалната енергија на математичкото нишало добива упростен вид. Развивајќи го $\cos \varphi$ во ред

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{4} \varphi^4 - \dots$$

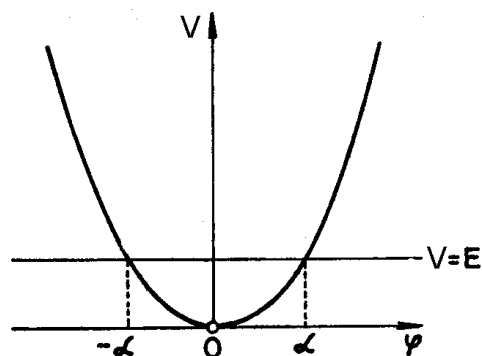
и занемарувајќи ги повисоките степени, ќе имаме

$$V = mg\ell(1 - \cos \varphi) = mg\ell\left(1 - 1 + \frac{1}{2} \varphi^2\right)$$

т.е.

$$V = \frac{1}{2} mg\ell \varphi^2$$

Добиваме парабола и при дадена енергија E движењето е можно само во онаа област на агли за која $V \leq E$. Границите се одредени со условите $V = E$ и тоа се φ_0 и $-\varphi_0$.



20. ОПШТИ ОСОБИНИ НА ЦЕНТРАЛНО ДВИЖЕЊЕ

Движење на честица при кое силата која делува на неа стално поминува низ една точка на просторот се нарекува **централно движење**, а соодветната сила **централна сила**. Овој вид на движење е од големо значење бидејќи во такви сили спаѓаат гравитационите и електричните сили. Да претпоставиме дека во стална точка е изворот на силата и да го означиме со $\vec{r}$ векторот на положбата на разгледуваната честица во однос на изворот на силата.

Тогаш по дефиниција на централното движење силата $\vec{F}$ во секој момент мора да биде колинеарна со единичниот вектор на положба $\vec{r}_0$, а факторот на размерност во општ случај може да зависи од положбата, брзината и времето

$$\vec{F} = f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{r}_0$$

Меѓутоа од поголем интерес се единствено такви сили чиј интензитет зависи само од интензитетот на векторот на положбата

$$\vec{F} = f(r) \vec{r}_0$$

и ние понатаму ќе се ограничине на овој тип на централни сили.

Моментот на силата во однос на постојана точка O поради колинеарноста на $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ е

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r) \vec{r}_0 = 0$$

па важи законот за константност на моментот на импулсот

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{C} \quad (1)$$

Според тоа, при *централно движење моментот на импулсот на честица во однос на изворот на силата е константен.*

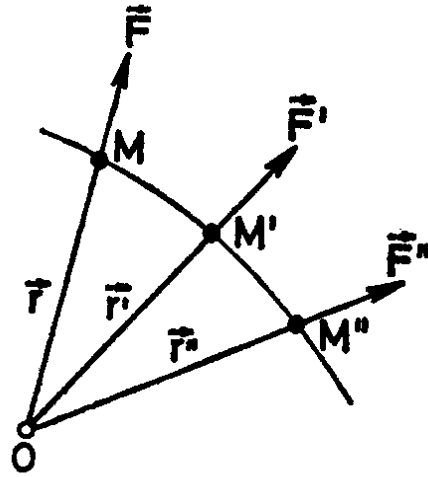
Порано, видовме дека секторската брзина е пропорционална на моментот на импулсот, т.е.

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

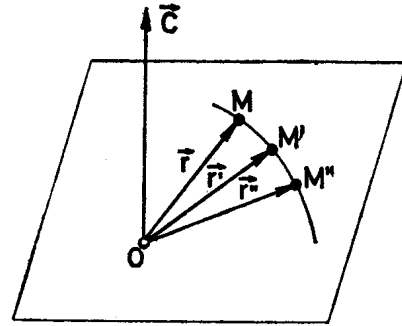
па значи сега и таа ќе биде константна

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{C}'$$

При централно движење секторската брзина е константна во текот на времето. Ова е всушност вториот Кеплеров закон.



Освен тоа, врз основа на (1) гледаме дека радиус-векторот $\vec{r}$ мора секогаш да биде нормален на постојаниот вектор $\vec{C}$, па постојано лежи во рамнина нормална на векторот $\vec{C}$. Значи, *централно движење секогаш се врши во една рамнина, па значи има два степени на слобода.*



Понатаму да воведеме величина

$$V(r) = -\int_{r_0}^r f(r) dr \quad (2)$$

Тогаш имаме

$$V'(r) = -f(r)$$

па централната сила може да ја напишеме во облик

$$\vec{F} = f(r)\vec{r}_0 = -V'(r)\vec{r}_0 = -V'(r) \cdot \text{grad}r$$

т.е.

$$\vec{F} = -\text{grad}V(r)$$

Значи, **централните сили од облик $\vec{F} = f(r)\vec{r}_0$ секогаш се конзервативни.** Притоа потенцијалот е одреден со релацијата (2) и зависи од законот на силата $f(r)$.

Бидејќи силите се конзервативни важи законот за запазување на механичката енергија

$$T + V = \text{const}$$

Значи, *при централно движење вкупната енергија на честицата е константна.*

Да ги изразиме аналитички законите за запазување на моментот на импулсот и енергијата

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} = m[\vec{r} \times (\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{\varphi}_0)] = m[r\vec{r}_0 \times (\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{\varphi}_0)] = \\ &= mr\dot{r}\vec{r}_0 \times \vec{r}_0 + mr \cdot r\dot{\varphi}\vec{r}_0 \times \vec{\varphi}_0 = mr^2\dot{\varphi}\vec{k} \end{aligned}$$

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const}$$

Наведените релации претставуваат два први интеграла на движење.

Вириална теорема

Ќе укажеме на уште едно својство на движењето под дејство на централна сила. Тоа е, всушност, специјален случај на поопшта теорема што важи за широка класа на различни системи - тоа е т.н. **вириална теорема**. Таа се одликува со тоа што има статистички карактер, т.е. разгледува разни механички величини усреднети по времето.

Да разгледаме произволен систем од честици определени со радиус вектори $\vec{r}_i$ кои се наоѓаат под дејство на сили $\vec{F}_i$ (вклучувајќи ги и силите на реакција). Равенките на движење на системите се

$$\vec{p}_i = \vec{F}_i \quad (3)$$

Да ја разгледаме величината

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

Нејзиниот тотален извод по времето е

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i \quad (4)$$

Првиот член може да се запише како

$$\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T$$

а вториот во вид

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Тогаш равенката (4) станува

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \quad (5)$$

За да преминеме кон средните вредности на погорните величини, треба горната равенка да се проинтегрира по времето од нула до некое τ и потоа да се подели тој интеграл со τ , т.е.

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = 2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

или

$$2\bar{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] \quad (6)$$

Ако движењето на разгледуваниот систем е периодично, т.е. вредностите на координатите на сите честици се повторуваат по определен период на време, па ако го избереме τ да биде еднакво на тој период, тогаш десната страна на (6) ќе биде еднаква на нула. Истото ќе го имаме и во случај на непериодично движење, ако координатите и брзините на сите честици од системот имаат конечни вредности. Во тој случај величината $|G|$ има горна граница, и избирајќи го τ достатно големо, можно е десната страна на (6) да се направи многу мала, скоро нула. Во секој од тие случаи ќе имаме

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} \quad (7)$$

Десната страна од ова равенство се нарекува вириал на Клаузиус, а самото равенство (7) ја изразува **вириалната теорема**.

Ако силите $\vec{F}_i$ имаат потенцијал, тогаш вириалната теорема е

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \text{grad}_i V \cdot \vec{r}_i} \quad (8)$$

За една честица што се движи под дејство на централна сила, релацијата (8) дава

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} \cdot r} \quad (9)$$

Ако на пример V е степена функција од r

$$V = ar^{n+1}$$

каде показателот е избран така што силата F да биде пропорционална на r^n , тогаш

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V$$

Равенството (9) станува

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V} \quad (10)$$

Во специјален случај кога F е обратно пропорционална на квадратот на растојанието, т.е. $n = -2$ ќе имаме

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V} \quad (11)$$

21. РАВЕНКА НА ТРАЕКТОРИЈА ПРИ ЦЕНТРАЛНО ДВИЖЕЊЕ

Рековме дека централното движење е рамнинско, па според тоа имаме и два степени на слобода. Поради природата на проблемот работиме во поларен координатен систем и обопштените координати ќе бидат r и φ . Во тој случај Лагранжовите равенки ќе бидат

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Лагранжовата функција е

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

па ќе имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} & \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\varphi}^2 - V'(r) = m r \dot{\varphi}^2 + f(r) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \dot{\varphi} & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Оттука Лагранжовите равенки ќе гласат

$$m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - f(r) = 0 \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (1)$$

Тоа се **диференцијални равенки на централното движење.**

Од втората равенка непосредно се наоѓа еден прв интеграл

$$m r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (2)$$

а тоа е законот за запазување на моментот на импулсот, па горната константа претставува момент на импулс. Со помош на овој прв интеграл може да се елиминира времето од диференцијална равенки на движење ставајќи

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$$

па имаме

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \ddot{r} &= -\frac{L}{m} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \dot{\varphi} = -\frac{L}{m} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{L}{m r^2} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Внесувајќи ги овие изрази во првата равенка (1) добиваме

$$-\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{L^2}{mr^3} - f(r) = 0$$

односно

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2 f(r)}{L^2} \quad (3)$$

Оваа равенка се нарекува **Бинеова равенка** и таа претставува **диференцијална равенка на траекторијата**. При даден закон на силата $f(r)$ тоа е диференцијална равенка во која непозната функција е $\frac{1}{r}$, а независно променлива е φ , па со нејзино решавање ќе ја добиеме конечната равенка на траекторијата во поларни координати во облик

$$\frac{1}{r} = F_1(\varphi)$$

На равенката на траекторијата можеме да ѝ дадеме и друг, интегрален облик, поаѓајќи од двата први интеграла на движење: закон за запазување на моментот на импулсот и на енергијата. Од првиот интеграл имаме

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

Ставајќи ги овие изрази во законот за запазување на енергијата добиваме

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] + V(r) = E$$

оттука имаме

$$\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}$$

Може да извршиме раздвојување на променливи

$$d\varphi = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

при што со интеграција добиваме

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

каде r_0 одговара на аголот $\varphi = 0$. Оваа равенка претставува **конечна равенка на траекторијата во интегрален облик**. При даден закон на силата $V(r)$ го определуваме од дадената релација, па интегралот на десната страна претставува извесна функција од r , па резултатот на интеграцијата ја дава конечната равенка на траекторијата во поларни координати во облик

$$\varphi = \varphi(r)$$

а со инверзија на оваа функција може да ја добиеме равенката и во облик

$$r = F_2(\varphi)$$

22. КЕПЛЕРОВ ПРОБЛЕМ

Меѓу централните сили специјално значење имаат силите кои опаѓаат со квадратот на растојанието, т.е. кои се од облик

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1)$$

при што k може да биде како позитивно така и негативно. Таква сила е на пример Њутновата сила на општа гравитација

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$

Проблемот на одредувањето на движењето под влијание на сили од обликот (1) се нарекува **Кеплеров проблем**.

Потенцијалната енергија која одговара на оваа сила изнесува

$$V(r) = -\int_{r_0}^r \frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0}$$

а ако земеме дека потенцијалната енергија во бесконечност е еднаква на нула, ќе биде $r_0 = \infty$, па добиваме

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

За да ја најдеме равенката на траекторијата го поставуваме горниот израз во интегралната равенка на траекторијата

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{k}{r}\right) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

Овој интеграл може да го напишеме во облик

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE\right) - \left(\frac{L}{r} + \frac{mk}{L}\right)^2}}$$

од каде гледаме дека е погодно да се воведе смената

$$\frac{L}{r} + \frac{mk}{L} = x, \quad -\frac{L}{r^2} dr = dx$$

и да ставиме

$$a^2 = \frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE$$

Тогаш добиваме

$$\varphi = -\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} - \arccos \frac{x_0}{a}$$

при што долната граница x_0 одговара на аголот $\varphi = 0$. Ако аголот φ го сметаме од положбата во која r има минимум, т.е. во која $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, означувајќи ја оваа вредност со r_0 врз основа на законот за запазување на енергијата во оваа положба имаме

$$\frac{1}{2} \frac{L^2}{mr_0^2} + \frac{k}{r_0} = E$$

Тогаш е

$$\frac{x_0}{a} = \frac{\frac{L}{r_0} + \frac{mk}{L}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE}} = \frac{\frac{L}{r_0} + \frac{mk}{L}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^2} + \frac{L^2}{r_0^2} + \frac{2mk}{r_0}}} = 1$$

па ќе биде

$$\arccos \frac{x_0}{a} = \arccos 1 = 0$$

па значи

$$\varphi = \arccos \frac{x}{a} = \arccos \frac{\frac{L}{r} + \frac{mk}{L}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE}}$$

Со инверзија на оваа функција добиваме

$$\frac{\frac{L}{r} + \frac{mk}{L}}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE}} = \cos \varphi$$

од каде

$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE} \cdot \cos \varphi - \frac{mk}{L}$$

Ако оваа равенка ја решиме по r , добиваме

$$r = \frac{L}{\sqrt{\frac{m^2 k^2}{L^2} + 2mE} \cdot \cos \varphi - \frac{mk}{L}} = \frac{-\frac{L^2}{mk}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}} \cdot \cos \varphi}$$

што може да се напише пократко во облик

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (2)$$

каде

$$p = -\frac{L^2}{mk}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}} \quad (3)$$

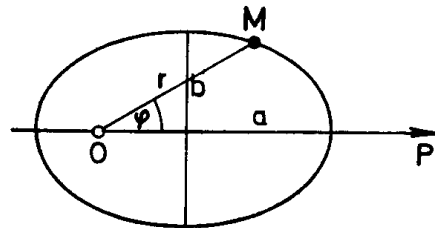
Равенката (2) претставува конусен пресек со фокус во полот на координатниот систем (значи во центарот на силата), и тоа елипса ако $\varepsilon < 1$, хипербола ако $\varepsilon > 1$, а парабола ако е $\varepsilon = 1$.

Според тоа, *под влијание на централна сила која опаѓа со квадратот на растојанието честичката опишува конусен пресек со фокус во изворот на силата и тоа елипса ако $E < 0$, хипербола ако $E > 0$ или парабола ако $E = 0$.* Ова е всушност **првиот Кеплеров закон**.

Ако е $k < 0$, што одговара на привлечна сила ќе биде $V(r) < 0$, па вкупната енергија може да биде и позитивна, и негативна и нула. Така во случај $k < 0$ траекторијата на честицата може да биде и елипса, и хипербола и парабола. Меѓутоа, ако $k > 0$, што одговара на одбивната сила, ќе биде $V(r) > 0$, па вкупната енергија е секогаш позитивна. Така во случај $k > 0$, траекторијата на честицата може да биде само хипербола, како на пример во случај на расејување на α -честици во поле на атомски јадра (Радерфордов експеримент).

Да се задржиме посебно на случајот кога траекторијата е елиптичка, т.е. кога е $k < 0$ и $E < 0$. Тогаш

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{a}$$



па според релацијата (3)

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{-\frac{L^2}{mk}}{1 - \left(1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}\right)}$$

т.е. добиваме

$$a = \frac{k}{2E}$$

Полуоската b може да се добие од $p = \frac{b^2}{a}$

$$b^2 = ap = -\frac{k}{2E} \frac{L^2}{mk} = -\frac{L^2}{2mE}$$

од каде

$$b = \sqrt{-\frac{L^2}{2mE}}$$

Бидејќи $k < 0$ и $E < 0$, добиените величини се реални и позитивни. Значи, кај елиптичките траектории големата полуоска зависи само од енергијата, а малата полуоска како од енергијата така и од моментот на импулсот.

Да ја најдеме уште зависноста на периодот на едно заобиколување T и големата полуоска a . Бидејќи секторската брзина е постојана, таа е еднаква на односот на површината на елипсата $ab\pi$ и периодот T па ќе имаме

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2m}\right)^2 = \left(\frac{ab\pi}{T}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot ap \cdot \pi^2}{T^2} = a^3 \left(-\frac{L^2}{mk}\right) \frac{\pi^2}{T^2}$$

а од тука

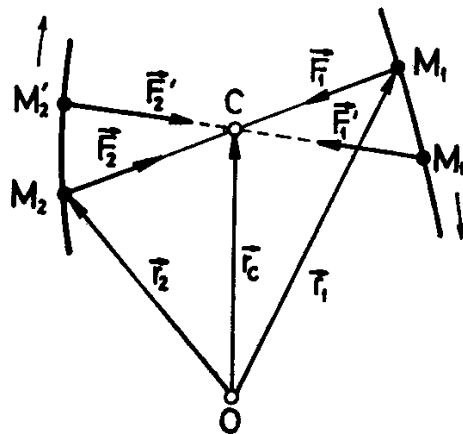
$$\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2 m}{k} = \text{const}$$

Значи, односот на квадратот на периодот на заобиколување и кубот на големата полуоска кај сите елиптички патеки е константен. Ова е **третиот Кеплеров закон**.

23. ЦЕНТРАЛНО ДВИЖЕЊЕ СО ПОДВИЖЕН ИЗВОР НА СИЛА

Сите досегашни разгледувања важат под претпоставка дека изворот на силата е неподвижен, т.е. дека во него се наоѓа честица со неспоредливо поголема маса од масата на честицата чие движење го разгледуваме и тогаш во изворот на силата се наоѓа и центарот на масата на двете честици. Меѓутоа во реалноста овој услов често пати не е задоволен и затоа да го проучиме општиот случај со подвижен извор на сила, т.е. случај кога двете честици се движат под дејство на централната сила на нивното взаемно дејство.

Тогаш силата која делува на честица со маса m_1 како и силата која делува на честица со маса m_2 секогаш поминуваат низ центарот на масата на двете честици, па центарот на масата овде игра улога на точка во просторот низ која секогаш поминуваат централните сили. Затоа во поранешните



изведувања треба само постојаната точка O да се замени со центарот на масата, па во овој случај движењето се врши во рамнина која униформно се движи заедно со центарот на масата, останувајќи постојана паралелна сама на себе, но поради движење на двете честици имаме четири степени на слобода.

Положбата на двете честици во рамнината на движење може да ја одредиме со помош на нивните радиус-вектори $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, но е попогодно наместо нив да се воведе радиус-вектор на центарот на масата $\vec{r}_c$ и нивен релативен радиус-вектор $\vec{r}$

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Од овие равенки напишани во облик

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_c, \quad \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$$

можеме да ги одредиме $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, со множење на втората со m_2 односно $-m_1$ и собирање со првата

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_c + m_2 \vec{r}$$

$$m_2 \vec{r}_2 + m_1 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_c - m_1 \vec{r}$$

а од тука

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Брзините на овие честици изнесуваат

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

каде е

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

релативна брзина на првата честица во однос на втората. Кинетичката енергија на овие честици врз основа на горните релации е

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_c^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_c \cdot \vec{v} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 \right) + \\ + \frac{1}{2} m_2 \left(v_c^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_c \cdot \vec{v} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 \right) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2$$

а воведувајќи ознаки

$$m = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

може да запишеме

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

па Лагранжовата функција за системот од овие две честици во случај тие да се изолирани изнесува

$$L = T - V = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 - V(r)$$

Овде m претставува вкупна маса на системот, а μ се нарекува редуцирана маса. Ако $m_2 \gg m_1$ ќе биде

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1$$

што одговара на претходните случаи.

Ако рамнината на движење ја земеме како XOY рамнина, а за обопштени координати да ги земеме координатите на центарот на масата x_c и y_c и релативните координати x и y , движењето на овие честици е одредено со Лагранжови равенки

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial L}{\partial x_c} &= 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial L}{\partial y_c} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Лагранжовата функција во експлицитен облик гласи

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y, z)$$

па добивме

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_c &= 0 & m \ddot{y}_c &= 0 \\ \mu \ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} & \mu \ddot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

што може да се напише и во векторска форма, имајќи предвид дека е

$$\vec{F} = -\text{grad } V$$

$$m \ddot{\vec{r}}_c = 0 \quad \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Првата равенка го определува движењето на центарот на масата, а втората релативното движење на честиците.

Значи, секое движење на две честици под взаемно дејство на централни сили може да се сведе на униформно транслаторно движење на центарот на масата, во кој би била концентрирана вкупната маса на честиците и на релативно движење на овие две честици, кое е еквивалентно на движење на една замислена честица со редуцирана маса околу друга неподвижна честица во центарот на масата.

Ако централните сили кои дејствуваат меѓу честиците опаѓаат со квадратот на растојанието имаме општ Кеплеров проблем.

Силата е од облик

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{r}_0$$

па ќе имаме

$$m\ddot{\vec{r}}_c = 0 \qquad \mu \ddot{\vec{r}} = \frac{k}{r^2} \vec{r}_0$$

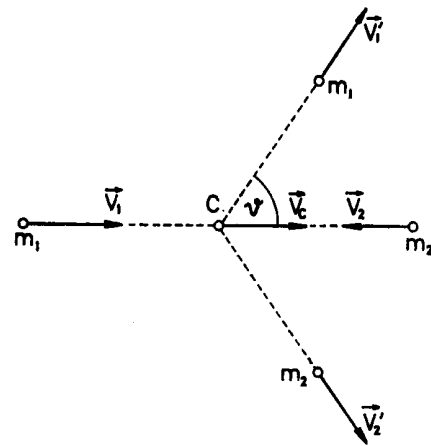
Првата равенка покажува дека центарот на маса се движи униформно, а втората го одредува релативното движење на двете честици. Таа е од ист облик како и равенката на движење на честица со неподвижен центар на привлекување во центар на масата со таа разлика што наместо масата m стои редуцирана маса μ . Затоа сите порано добиени релации за проблемот на две тела важат и во овој случај со таа разлика што секаде наместо маса m треба да ставиме редуцирана маса μ и под r да подразбираме растојание од центарот на масата.

24. ЕЛАСТИЧЕН СУДИР НА ДВЕ ЧЕСТИЦИ

Под еластичен судир на две честици ќе подразбираме такво заемно дејство меѓу нив при кое една честица под влијание на централната сила која потекнува од другата ќе скршне за известен агол од својот првобитен правец, што на големи растојанија од местото на судирот е еквивалентно на еластичен судир на две цврсти топки. Видовме порано дека централното движење на две изолирани честици може да се сведе на униформно движење на центарот на

масата и релативно движење на овие две честици, поедноставно е да се разгледува судир на две честици во систем врзан за нивниот центар на маса. Во овој систем доаѓа до израз само релативното движење на честиците, со што бројот на степени е сведен на два. Неподвижниот систем се нарекува **лабораториски систем**, а системот чиј почеток е врзан за центарот на масата на овие честици се нарекува **систем на центар на маса**, при што вториот во однос на првиот се движи униформно како и самиот центар на маса. Бидејќи сите инерцијални системи се еквивалентни а системот од овие две честици е изолиран, во двата системи важат исти закони, па како во лабораториски така и во системот на центар на маса важат законите за запазување на енергија и импулсот.

Нека двете честици во лабораториски систем пред судирот да имаат брзина $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а после судирот $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$ и нема при судирот првата честица го промени правецот за агол ϑ .

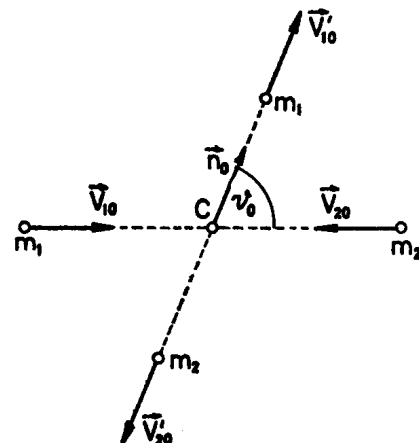


Притоа на сликата се прикажани положбите на двете честици пред и по судирот како и положбата на центарот на масата во моментот на судирот, т.е. во моментот кога честиците се наоѓаат најблиску една до друга. Да земеме втората да мирува пред судирот, така што брзината на првата честица е истовремено и релативна брзина на првата во однос на втората

$$\vec{v}_1 = \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = 0$$

при што оваа релативна брзина мора да биде однапред зададена како и масата на двете честици.

Во системот на центар на маса ќе ги означиме сите величини со индекс нула. Почетокот на овој



систем се движи во однос на лабораториски систем со брзина

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

Брзина на честиците во овој систем пред судирот се

$$\vec{v}_{10} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}, \quad \vec{v}_{20} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (1)$$

Вкупниот импулс на системот од овие две честици пред судирот изнесува

$$\vec{p}_0 = m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} - m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

т.е.

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = 0 \quad (2)$$

Значи, вкупниот импулс на двете честици во системот на центар на маса е еднаков на нула. Бидејќи вкупниот импулс мора да остане ист и по судирот, ќе биде

$$\vec{p}_0 = \vec{p}'_{10} + \vec{p}'_{20} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}'_{10} = -\vec{p}'_{20} \quad (3)$$

Импулсите на честиците после судирот остануваат меѓусебно исти по интензитетот, а спротивно насочени.

Бидејќи заемното дејство на разгледуваните честици на големи меѓусебни растојанија е еднакво на нула, вкупната енергија на системот од две честици на големи растојанија се сведува на кинетичка енергија. Со оглед дека $p_{20} = p_{10}$, вкупната енергија пред судирот изнесува

$$E_0 = \frac{1}{2m_1} p_{10}^2 + \frac{1}{2m_2} p_{20}^2 = \frac{1}{2} p_{10}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} p_{10}^2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

што може да се напише како

$$E_0 = \frac{1}{2\mu} p_{10}^2 \quad (4)$$

Со оглед дека $p'_{20} = p'_{10}$, вкупната енергија после судирот ќе биде

$$E'_0 = \frac{1}{2m_1} p'^2_{10} + \frac{1}{2m_2} p'^2_{20} = \frac{1}{2} p'^2_{10} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} p'^2_{10} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

т.е.

$$E'_0 = \frac{1}{2\mu} p_{10}^2 \quad (5)$$

Бидејќи вкупната енергија мора да остане иста пред и после судирот, изедначувајќи ги (4) и (5) добиваме $p'_{10} = p_{10}$, а бидејќи според (2) и (3)

$p_{10} = p_{20}$ и $p'_{10} = p'_{20}$ ќе биде и $p'_{20} = p_{20}$, па така

$$p'_{10} = p_{10} \quad p'_{20} = p_{20}$$

Импулсите на честичите после судирот по интензитет остануваат исти.

Поради непроменливост на масата исти заклучоци важат и за брзините, па со оглед и на релацијата (3) можеме да кажеме: *Во системот на центар на маса резултатот на судирот на две честичи се сведува на промена на правецот (завртување) на брзините на двете честичи кои остануваат непроменети по интензитет, а спротивно насочени.*

Ова својство многу ги упростува односите при судир во систем на центар на маса.

Ако со $\vec{n}_0$ го означиме единичниот вектор во правец на брзината на првата честича по судирот $\vec{v}'_{10}$ според (1) и горниот заклучок брзините на честичите после судирот во системот на центар на маса ќе бидат

$$\vec{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 \quad \vec{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0$$

Тогаш брзините на честичите после судирот во лабораториски систем ќе бидат

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_c + \vec{v}'_{10} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_c + \vec{v}'_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0$$

Притоа правецот на единичниот вектор $\vec{n}_0$ кој го одредува правецот на првата честича после судирот во системот на центар на маса, зависи од законот на заемното дејство на честичите и нивната заемна положба во текот на судирот, па за него не може ништо да се каже врз основа на законите на запазување на енергија и импулс.

Да ја прикажеме врската меѓу аглите на откон на првата честица во лабораториски и во систем на центар на масата. Тогаш е

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{MM'}{OM'} = \frac{MM'}{OO' + O'M'} = \frac{v'_{10} \sin \vartheta_0}{v_c + v'_{10} \cos \vartheta}$$

односно

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta_0}{\frac{v_c}{v'_{10}} + \cos \vartheta_0}$$

Но бидејќи

$$\frac{v_c}{v'_{10}} = \frac{\frac{m_1}{m_1 + m_2} v}{\frac{m_2}{m_1 + m_2} v} = \frac{m_1}{m_2}$$

добиваме

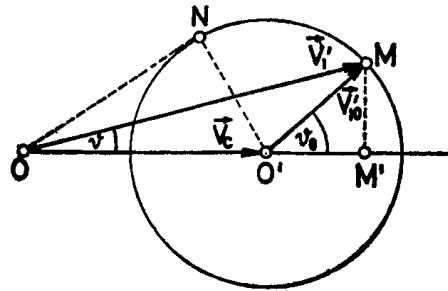
$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta_0}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \vartheta_0}$$

Оваа релација ни ја дава врската меѓу аглите на скршнување во лабораториски и систем на центар на масата и гледаме дека зависноста меѓу ϑ и ϑ_0 зависи само од односот на масите на честиците.

Ако $m_1 < m_2$, тогаш $v_c < v'_{10}$, па точката O ќе лежи внатре во кругот. Тогаш аголот ϑ може да ги има сите вредности како помали така и поголеми од $\pi/2$, што зависи од природата на централните сили и взаемната положба на честиците, па во случај $m_1 < m_2$ првата честица после судирот во лабораториски систем може да скршне за произволен агол.

Ако е $m_1 > m_2$, ќе биде $v_c > v'_{10}$, како на сликата, па аголот ϑ не може да ја премине извесна максимална вредност, која ја достигнува кога правата OM ќе ја заземе положбата на тангентата ON . Таа максимална вредност на сликата е определена со

$$\sin \vartheta_{\max} = \frac{v'_{10}}{v_c} = \frac{m_2}{m_1}$$



па во случајот $m_1 > m_2$ првата честица после судирот во лабораториски систем не може да скршне повеќе од извесен максимален агол, кој зависи од односот на масите.

Најпосле ако е $m_1 = m_2$ тоа може да се смета како граничен случај на претходниот, па добиваме $\sin \vartheta_{\max} = 1$

$$\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

За последниот случај ќе имаме понатаму

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta_0}{1 + \cos \vartheta_0} = \frac{2 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \cos \frac{\vartheta_0}{2}}{2 \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}$$

односно

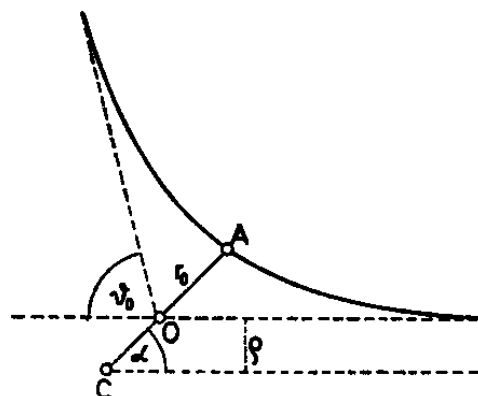
$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{2}$$

Значи, во случај $m_1 = m_2$ аголот на скршнување во лабораториски систем секогаш е половина од аголот на скршнување во системот на центар на масата.

25. РАСЕЈУВАЊЕ НА ЧЕСТИЦИ

Да го проучиме еластичниот судир на честици земајќи го предвид и одредениот закон на нивното заемно дејство. Разгледуваме отклон на честица со маса m_1 во поле на централна сила со потенцијал $V(r)$ кој потекнува од друга честица со маса m_2 . Порано видовме, дека движењето на честица во поле на подвижен извор на сила е еквивалентно на замислено движење на честица со редуцирана маса μ во поле на неподвижен извор на сила во центарот на масата. Поради тоа ќе биде попогодно да се разгледува ова скршнување на честица во систем на центар на маса, каде имаме само два степени на слобода.

Нека е C центарот на масата во кој го замислуваме неподвижниот извор на сила, полната линија е траекторијата на честица со маса μ , $\vec{v}_{10}$ и $\vec{v}_{20}$ почетна и крајна брзина на таа



честица, а ϑ_0 аголот на отклон, т.е. аголот меѓу асимптомите на траекторијата. Бидејќи интензитетот на централните сили зависи само од растојанието од изворот на силата, траекторијата на честицата е симетрична во однос на правата која поминува низ центарот на масата и најблиската точка од траекторијата, и нека е α агол меѓу оваа оска на симетрија CA и првобитниот правец на честицата. Тогаш според сликата

$$\vartheta_0 + 2\alpha = \pi \quad \text{односно} \quad \vartheta_0 = \pi - 2\alpha$$

па проблемот на одредување на аголот на отклон ϑ_0 се сведува на проблем на наоѓање на аголот α .

Да воведеме поларни координати во рамнината на траекторијата, земајќи го центарот на масата C за пол, а оската на симетрија за поларна оска. Ако имаме предвид дека разгледуваната траекторија во системот на центарот на масата одговара на движење на честица со редуцирана маса μ , равенката на оваа траекторија ќе гласи

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

каде r_0 одговара на најблиската точка од патеката A ($r_0 = \overline{CA}$). За бесконечно одалечена точка на траекторијата ќе биде $r = \infty$, $\varphi = \alpha$, па имаме

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

и оваа релација го одредува аголот α , а со тоа и ϑ_0 .

Во овој проблем погодна е наместо константите на движење E и L да се воведат други две константи: брзина на честицата во бесконечност v_∞ која има вредност $v_\infty = |\vec{v}_{10}| = |\vec{v}_{20}|$ и т.н. **параметар на судирот** ρ кој се дефинира како растојание на кое честицата би поминала покрај изворот на сила кога полето на силата не би дејствувало. Тогаш е

$$E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2, \quad L = \rho \mu v_\infty$$

Овие релации ги изразуваат старите константи на движење со помош на новите, па претходната релација добива форма

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho \mu v_{\infty}}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2\mu \left[\frac{1}{2} \mu v_{\infty}^2 - V(r) \right] - \frac{\rho^2 \mu^2 v_{\infty}^2}{r^2}}}$$

т.е.

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{\mu v_{\infty}^2}}}$$

Ако е даден законот на заемно дејство на честиците $V(r)$ и брзината на честицата во бесконечност v_{∞} , оваа релација заедно со поранешната, го одредува аголот на отклон $\mathcal{G}_0$ во функција од параметарот на судирот ρ

$$\alpha = \alpha(\rho), \quad \text{односно} \quad \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0(\rho)$$

За оваа функција да претпоставиме дека е еднозначна и монотона и дека може да се реши по ρ

$$\rho = \rho(\mathcal{G}_0)$$

На пример, ако централната сила е одбивна и опаѓа со растојанието, тогаш доколку честицата помине поблиску до изворот на силата дотолку повеќе ќе скршне, т.е. колку е помало ρ толку е поголемо $\mathcal{G}_0$. Во овој случај горната функција ќе биде извесна монотono опаѓачка функција.

25.1. Ефикасен пресек на расејување

Во физичките проблеми обично не се работи за индивидуално скршување на честица, туку за расејување на паралелен сноп на исти честици кои доаѓаат со иста брзина v_{∞} . Различните честици во снопот имаат различни параметри на судирот и затоа скршуваат под различни агли. Да претпоставиме дека снопот е хомоген, па да ја означиме со n т.н. густина на флуksот, т.е. број на честици кои во единица време поминуваат низ единица површина на нормалниот пресек на снопот, а со dN бројот на расејаните честици кои во единица време скршуваат за агол меѓу $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}_0 + d\mathcal{G}_0$. Тогаш односот

$$d\sigma_0 = \frac{dN}{n}$$

т.е. односот меѓу бројот на расејаните честици во единица време во интервалот $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$ и густината на флуксот на упадните честици се нарекува **диференцијален ефикасен пресек на расејување**. Збирот на овие величини по сите можни агли

$$\sigma_0 = \int d\sigma_0 = \int \frac{dN}{n}$$

се нарекува **тотален ефикасен пресек на расејување**. Тој е одреден од природата на взаемното дејство на честиците и претставува важна карактеристика на процесите на расејување.

Ако со ρ и $\rho + d\rho$ означиме два параметри на судир и да разгледаме упадни честици кои имаат параметар на судир во тој интервал, тие ќе скршнат за агол кој лежи во интервалот $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$ како на сликата. Бројот на честици кои во единица на време ќе се отклонат за агол меѓу ϑ_0 и $\vartheta_0 + d\vartheta_0$ еднаков е на бројот на честици кои на големо растојание од изворот на силата ќе поминат во единица на време низ кружен прстен со радиуси ρ и $\rho + d\rho$, па изнесува

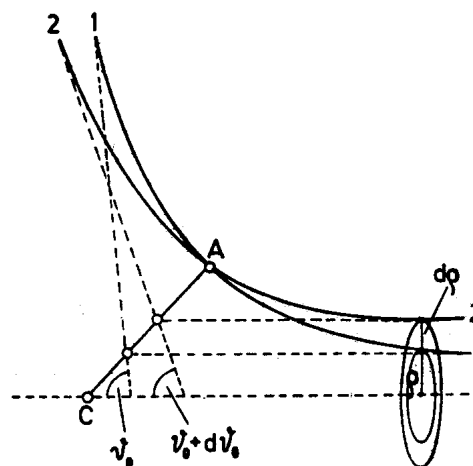
$$dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$$

Тогаш диференцијалниот ефикасен пресек на расејување е

$$d\sigma_0 = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho$$

т.е. диференцијалниот ефикасен пресек на расејување е еднаков на површината на кружниот прстен меѓу ρ и $\rho + d\rho$, кој одговара на интервалот на аголот на отклон $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$.

Оваа величина може да ја изразиме и во функција од аголот на отклон, т.е. бидејќи $\rho = \rho(\vartheta_0)$



$$d\sigma_0 = 2\pi\rho(\vartheta_0)\frac{d\rho(\vartheta_0)}{d\vartheta_0}d\vartheta_0$$

Имајќи предвид дека просторниот агол кој одговара на интервалот $(\vartheta_0, \vartheta_0 + d\vartheta_0)$

$$d\omega_0 = 2\pi \sin \vartheta_0 d\vartheta_0$$

тогаш

$$d\sigma_0 = \frac{\rho(\vartheta_0)}{\sin \vartheta_0} \frac{d\rho(\vartheta_0)}{d\vartheta_0} d\omega_0 = \sigma(\vartheta_0) d\omega_0$$

Овие релации го определуваат диференцијалниот ефикасен пресек на расејување во функција од аголот на отклон во системот на центар на маса. Ако сакаме да поминеме во лабораториски систем, треба во добиените изрази да преминеме од агол ϑ_0 на агол ϑ .

Тоталниот ефикасен пресек на расејување ќе биде

$$\sigma_0 = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\vartheta_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0$$

26. МАЛИ ОСЦИЛАЦИИ

26.1. Стабилна рамнотежа на систем честици

Да разгледаме систем честици со n степени на слобода и да претпоставиме дека овој систем е холономен и конзервативен и нека неговата положба е одредена со помош на обопштени координати $q_1, q_2, \dots, q_n$. Ако во некоја положба на системот сите сили кои делуваат на честичките се еднакви на нула, ќе бидат и сите обопштени сили исто така еднаква на нула

$$Q_j = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и тогаш велиме дека системот честици се наоѓа во рамнотежа. Да претпоставиме уште и дека во таа положба $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2}\right)_0 \neq 0$, тогаш горните услови

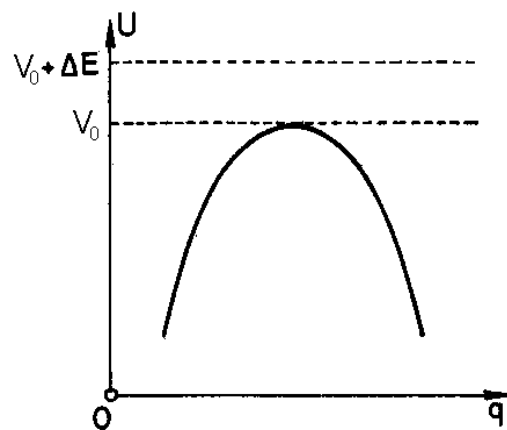
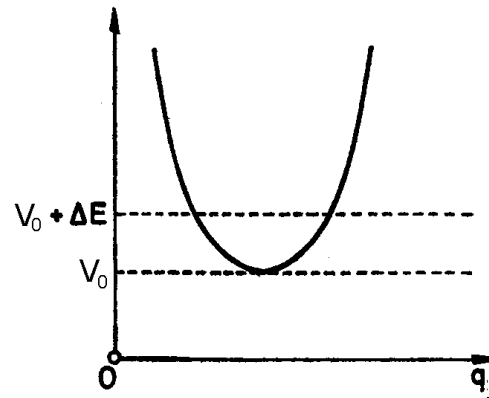
значат дека при рамнотежа на системот честици под услов $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2}\right)_0 \neq 0$ неговата

потенцијална енергија има екстрем. Да го изведеме сега системот малку од рамнотежа, давајќи им на неговите честици мали брзини. Ако при тоа системот постојано останува во околина на својата рамнотежна положба, велиме дека рамнотежата е **стабилна**, а во спротивно дека е **нестабилна**.

Да претпоставиме дека системот е во положба на минимум потенцијална енергија со енергија $E = V_0$. Ако системот го изведеме малку од оваа положба зголемувајќи му ја енергијата за ΔE , тоа ќе предизвика зголемување на неговата потенцијална енергија и еден дел од примената енергија ќе се употреби за ова зголемување на потенцијалната енергија, а друг дел за добивање кинетичка енергија. Бидејќи системот по претпоставка е конзервативен, важи законот за запазување на енергијата.

$$T + V = E = \text{const}$$

па секое понатамошно зголемување на потенцијалната енергија мора да предизвика намалување на кинетичката енергија. Кога системот на честици толку ќе се одалечи од рамнотежната положба што потенцијалната енергија стане $V_0 + \Delta E$, кинетичката енергија ќе се сведе на нула, па системот ќе се запре во таа положба. Потоа под дејство на силите ќе почне да се враќа кон својата рамнотежна положба и ќе продолжи да врши мали осцилации околу оваа положба. Така ова движење е ограничено и системот постојано ќе остане во околината на својата рамнотежна положба, па оваа рамнотежа е стабилна.



Ако е системот во положба на максимум потенцијална енергија, секое одалечување на системот од рамнотежната положба би предизвикало намалување на потенцијалната енергија, а со тоа и зголемување на кинетичката енергија. Така во овој случај системот сè повеќе би се одалечувал од својата рамнотежна положба, па оваа рамнотежа е нестабилна (лабилна) и системот не осцилира.

Според тоа, ако во положба на рамнотежа на холономен конзервативен систем, потенцијалната енергија има минимум, рамнотежата на системот е стабилна. Овој став е познат под името Лежен-Дирихлетова теорема и претставува само доволен, но не и потребен услов за стабилност на рамнотежата. Имено, систем на честици може да биде во стабилна рамнотежа и во конфигурација во која потенцијалната енергија нема минимум. Лежен-Дирихлетова теорема се формулира како

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j^2} \right)_0 > 0 \quad j = (1, 2, \dots, n)$$

Како пример за стабилна рамнотежа може да послужи математичко нишалото во својата најниска рамнотежна положба.

$$V = mg\ell(1 - \cos \varphi)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_0 = (mg\ell \sin \varphi)_{\varphi=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right)_0 = (mg\ell \cos \varphi)_{\varphi=0} = mg\ell > 0$$

26.2. Диференцијални равенки на мали осцилации

Да ги избереме сега обопштени координати на системот така што да ги сметаме од положбата на неговата стабилна рамнотежа, т.е. тие во таа положба да се еднакви на нула

$$(q_j)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Да претпоставиме уште дека кинетичката енергија на системот е хомогена квадратна функција од обопштените брзини

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2)$$

При тоа коефициентите a_{jk} се извесни функции од обопштените координати

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

па ако ги развиеме во Тејлоров ред околу положбата на стабилна рамнотежа, со оглед на условите (1) имаме

$$a_{jk}(q_1, \dots, q_n) = a_{jk}(0, \dots, 0) + \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_\ell} \right)_0 q_\ell + \dots$$

Поради малото одалечување на системот од рамнотежната положба сите обопштени координати q_ℓ имаат постојано мали вредности, па може да ги занемариме повисоките членови

$$a_{jk} \approx a_{jk}(0, \dots, 0) \quad (3)$$

па, околу положбата на стабилна рамнотежа можеме да земеме дека коефициентите a_{jk} во изразот за кинетичка енергија се константни.

Да ја проучиме сега потенцијалната енергија чие нулто ниво е одредено така што во положбата на стабилна рамнотежа да биде нула

$$V(0, \dots, 0) = 0 \quad (4)$$

Да ја развиеме потенцијалната енергија во Тејлоров ред околу положбата на стабилна рамнотежа

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots$$

Со оглед на условите (4) и Лежен-Дирихлетовата теорема, а поради мали вредности на q_j околу положбата на стабилна рамнотежа можеме да го задржиме само третиот член кој е од форма

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} q_j q_k \quad (5)$$

Според тоа, околу положбата на стабилна рамнотежа потенцијалната енергија на системот секогаш може да се прикаже како хомогена квадратна функција од обопштените координати.

Ако во изразите (2) и (5) взаемно ги замениме индексите j и k и го смениме редот на сумирање, ќе добиеме

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{kj} q_j q_k$$

па со споредување на појдовните изрази гледаме дека

$$a_{jk} = a_{kj} \quad b_{jk} = b_{kj}$$

Значи, коефициентите a_{jk} и b_{jk} во изразите за кинетичка и потенцијална енергија се симетрични.

Да ги формираме соодветните Лагранжови равенки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Според (2) и (5) Лагранжовата функција е

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - b_{jk} q_j q_k)$$

а бидејќи секој пар на индекси се појавува два пати, ќе биде

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^n b_{jk} q_k$$

па Лагранжовите равенки гласат

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n b_{jk} q_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

Овој систем од n симултани диференцијални равенки, линеарен по вторите изводи на обопштени координати ги претставува **диференцијални равенки на малите осцилации** на холономни конзервативен систем на честици околу положбата на стабилна рамнотежа.

26.3. Нормални координати на систем честици

Да ги побараме партикуларните интегрални на системот (6) во облик

$$q_k = A_k \sin(\omega t + \psi) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

Со замена на овие изрази во горниот систем равенки добиваме

$$-\sum_{k=1}^n a_{jk} \omega^2 A_k \sin(\omega t + \psi) + \sum_{k=1}^n b_{jk} A_k \sin(\omega t + \psi) = 0$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n (b_{jk} - \omega^2 a_{jk}) A_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Ова е систем од n линеарни хомогени равенки со n непознати A_k . Системот има решение само кога неговата детерминанта е нула,

$$|b_{jk} - \omega^2 a_{jk}| = 0 \quad (9)$$

Оваа равенка се нарекува **карактеристична равенка** и таа ги одредува можните вредности на ω^2 . Бидејќи горната детерминанта е од n -ти ред, тоа ќе биде алгебарска равенка од n -ти ред по ω^2 , па корените ќе ги означиме со ω_ℓ^2 ($\ell = 1, 2, \dots, n$). Величините ω_ℓ одредени на овој начин се нарекуваат **својствени (сопствени) фреквенции на системот**.

Да покажеме дека сите корени ω^2 на оваа равенка се реални и позитивни. За таа цел да ја помножиме равенката (8) со A_j и да ги собереме така добиените равенки па j

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (b_{jk} - \omega^2 a_{jk}) A_k A_j = 0$$

од каде имаме

$$\omega^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} A_j A_k}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} A_j A_k} \quad (10)$$

Бидејќи изразите во броителот и именителот имаат формално ист облик како потенцијалната односно кинетичката енергија, а тие двете се позитивно дефинитни, и наведените изрази во горната релација се реални и позитивни, па исто својство мора да го има и ω^2 . Според тоа, сите корени на карактеристичната равенка ω^2 се реални и позитивни.

На секој корен на карактеристичната равенка ω_ℓ^2 одговара еден систем линеарни хомогени равенки (8), од кој можеме да одредиме соодветните коефициенти A_k , одредени само до еден мултипликативен фактор, кои ќе ги

означиме со $A_{k\ell}$, а соодветните константи ψ ќе ги означиме со ψ_ℓ . Соодветните партикуларни интеграли на диференцијалните равенки (6) одредени се со релациите (7)

$$q_{k\ell} = A_{k\ell} \sin(\omega_\ell t + \psi_\ell) \quad k = (1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

а бидејќи овие диференцијални равенки се линеарни, линеарните комбинации на ваква партикуларни интеграли претставуваат исто така интеграли на равенките (6)

$$q_k = \sum_{\ell=1}^n C_\ell A_{k\ell} \sin(\omega_\ell t + \psi_\ell) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

Овие изрази содржат $2n$ произволни константи C_ℓ и ψ_ℓ кои се одредени со почетните услови, па тие претставуваат општи интеграли на разгледуваните диференцијални равенки на мали осцилации на систем честици.

Според тоа, *малите осцилации на холономен конзервативен систем на честици околу положбата на стабилна рамнотежа можат секогаш да се прикажат како суперпозиција на чисто хармониски осцилации на системот како целина.*

Наместо обопштени координати q_k да воведеме нови величини Q_ℓ со релациите $Q_\ell = C_\ell \sin(\omega_\ell t + \psi_\ell)$ т.е.

$$q_k = \sum_{\ell=1}^n A_{k\ell} Q_\ell \quad (13)$$

каде коефициентите $A_{k\ell}$ се одредени со системот равенки (8) за $\omega = \omega_\ell$ и така дефинираните величини Q_ℓ се нарекуваат **нормални или главни координати на системот.**

Лагранжовата функција во овие координати добива облик

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \dot{Q}_\ell^2 - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \omega_\ell^2 Q_\ell^2$$

Бидејќи $L = T - V$ тогаш

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \dot{Q}_\ell^2 \quad V = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \omega_\ell^2 Q_\ell^2$$

т.е. во нормални координати на системот, кинетичката и потенцијалната енергија имаат облик на сума на чисто квадратни членови.

Диференцијалните равенки на движење во овие координати се

$$\ddot{Q}_\ell + \omega_\ell^2 Q_\ell = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, n)$$

Според тоа, со воведување на нормални координати на системот, диференцијални равенки на малите осцилации се распаѓаат на n меѓусебно независни равенки од кои секоја опишува една чисто хармониска осцилација на системот во целина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Djordje Musicki, "*Teorijska mehanika*", Beograd, 1975
2. H. Goldstein, "*Classical Mechanics*", Cambridge, USA, Addison Wesley, 1980
3. Л. Ландау и Е. Лифшиц, "*Механика*", Москва, Наука, 1973
4. Ф. Гантмахер, "*Аналитичка механика*", Београд, 1965